Annexe 1

Corrigés des exercices supplémentaires

de l'ouvrage :

Physique : Spectroscopie Atomique et Moléculaire

Pr Abdelouahab TALEB

Université USTHB

Série du chapitre n°1 Corps noir

Exercice 01 : 1°) Le flux net échangé par la sphère est égal à :

$$P = \text{Flux émis} - \text{Flux absorbé}$$

$$P = \sigma S T_S^4 - \sigma S T_a^4 = \sigma S(T_S^4 - T_a^4) = 5{,}67.10^{-8}.4.\pi.R^2(T_S^4 - T_a^4)$$

$$P = 5{,}67.10^{-8}.4.\pi.0{,}05^2(1273^4 - 293^4) = 4662\ W$$

2°) $$\lambda_{max} T_S = 2898 \qquad \lambda_{max} = \frac{2898}{1273} = 2{,}27\ \mu m$$

$$M(\lambda_{max} T_S) = B\ T_S^5$$

$$B = 1{,}287.10^{-11}\ W.m^{-2}.\mu m^{-1}.K^{-5}\ \text{ si } \lambda_{max}\ \text{ en } \mu m$$

$$M(\lambda_{max} T_S = 1273) = 43025\ W.m^{-2}.\mu m^{-1}$$

3°)

$$F(\lambda_1 T_S) = F(509) \cong 0 \qquad F(\lambda_2 T_S) = F(891) = 5.10^{-5}$$

La fraction d'énergie émise dans la fenêtre visible est égale à :

$$F_{\lambda_1 T_S \to \lambda_2 T_S} = F(\lambda_2 T_S) - F(\lambda_1 T_S) = 5.10^{-5}$$

Seule 0,005 % de l'énergie émise par la sphère est rayonnée dans le domaine du visible. Cette quantité est très faible. Aussi la sphère ne sera pas vue par l'observateur.

Exercice 02 : 1°) Le maximum de la longueur d'onde émise par la peau est égal à :

$$\lambda_{max} T = 2898 \qquad \lambda_{max} = \frac{2898}{308} = 9{,}4\ \mu m$$

2°) Le flux net échangé par le corps est égal à :

$$P = \text{Flux émis} - \text{Flux absorbé}$$

$$P = \varepsilon\sigma S T_S^4 - \varepsilon\sigma S T_a^4 = \sigma\varepsilon S(T_S^4 - T_a^4) = 5{,}67.10^{-8}.0.98.2(T_S^4 - T_a^4)$$

$$P = 5{,}67.10^{-8}.0.98.2(308^4 - 293^4) = 181\ \mathrm{W}$$

3°) Le corps humain perd 181 joules par seconde soit 43,26 calories par seconde. En une journée le corps humain perd :

$$\text{Perte d'énergie} = 43{,}26.3600.24 = 3737\ \text{kcalories par jour}$$

Exercice 03 : Calculons la fraction d'énergie contenue dans la bande spectrale (0, λ_{max}).

$$F(\lambda_{max}T) = \frac{\int_0^{\lambda_{max}} M(\lambda, T)d\lambda}{\sigma T^4}$$

$$F(\lambda = 0\ T) = F(0) = 0 \qquad F(\lambda_{max}T) = F(2898) = 0{,}25$$

La fraction d'énergie contenue dans la bande spectrale (0, λ_{max}) est égale à :

$$F_{0T \rightarrow \lambda_{max}T} = F(\lambda_{max}T) - F(0\ \lambda_{max}T) = 0{,}25$$

Elle est représentée par la partie hachurée de la figure ci-dessous.
La fraction d'énergie émise dans l'intervalle [λ_{max}, ∞] est égale à 75 %.

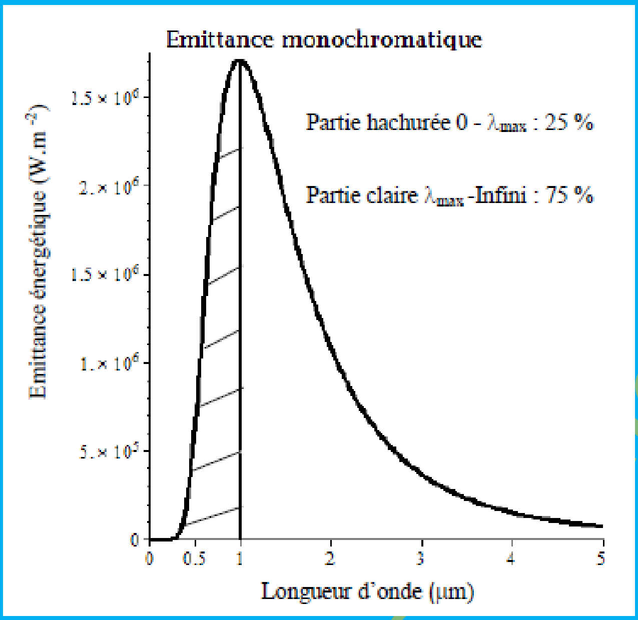
$$F(\lambda_{max}T) = \frac{\int_0^{\lambda_{max}} M(\lambda, T)d\lambda}{\sigma T^4}$$

$$F(\lambda = 0\ T) = F(0) = 0 \qquad F(\lambda_{max}T) = F(2898) = 0{,}25$$

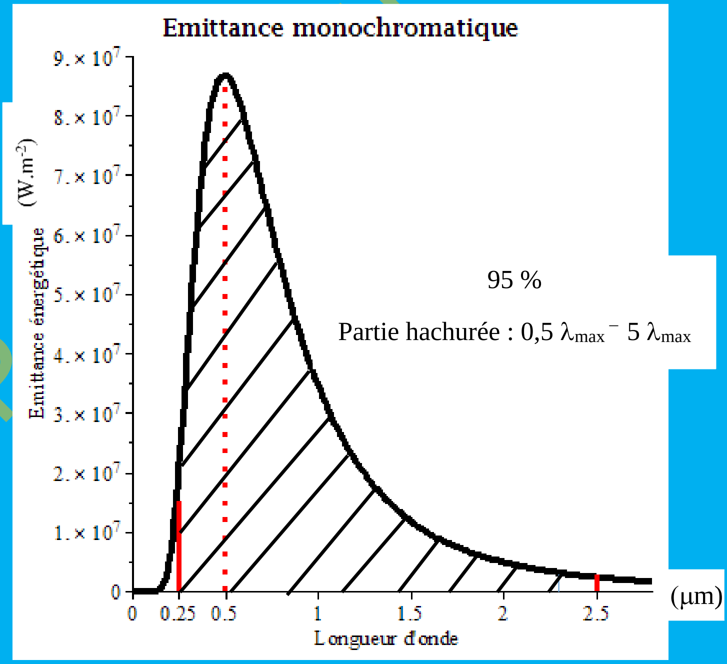
La fraction d'énergie contenue dans la bande spectrale (0, λ_{max}) est égale à :

$$F_{0T \rightarrow \lambda_{max}T} = F(\lambda_{max}T) - F(0\ \lambda_{max}T) = 0{,}25$$

Elle est représentée par la partie hachurée de la figure ci-dessous.


Emittance monochromatique
Emittance énergétique (W.m^{-2})
1.5 × 10^{6}
2. × 10^{6}
1.5 × 10^{6}
1. × 10^{6}
5. × 10^{5}
0
0 0.5 1 2 3 4 5
Longueur d'onde (μm)
Partie hachurée 0 - λ_{max} : 25 %
Partie claire λ_{max} -Infini : 75 %

Exercice 04


Emittance monochromatique
Emittance énergétique (W.m^{-2})
9. × 10^{7}
8. × 10^{7}
7. × 10^{7}
6. × 10^{7}
5. × 10^{7}
4. × 10^{7}
3. × 10^{7}
2. × 10^{7}
1. × 10^{7}
0
0 0.25 0.5 1 1.5 2 2.5
Longueur d'onde
(μm)
95 %
Partie hachurée : 0,5 λ_{max} – 5 λ_{max}

$$F(\lambda_{max}T) = \frac{\int_0^{\lambda_{max}} M(\lambda, T)d\lambda}{\sigma T^4}$$

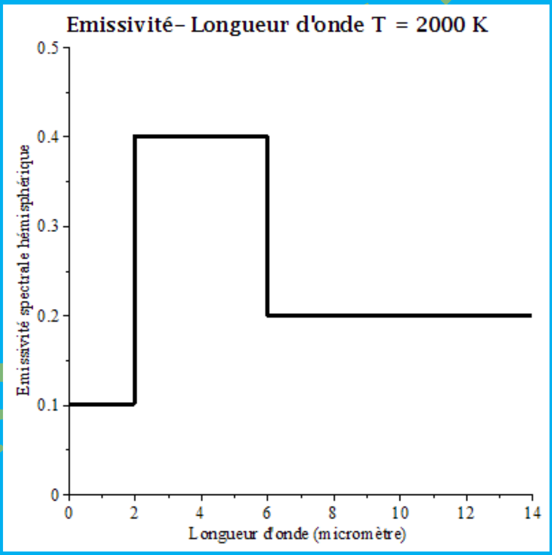
$$F(\lambda = 0{,}5\lambda_{max}T) = F(1449) = 0{,}01 \qquad F(5\lambda_{max}T) = F(14490) = 0{,}96$$

La fraction d'énergie émise dans la bande spectrale [$0{,}5\lambda_{max} = 0{,}25$ µm, $5\lambda_{max} = 2{,}5$ µm] est égale à :

$$F_{0,5\lambda_{max}T \to 5\lambda_{max}T} = F(5\lambda_{max}T) - F(0{,}5\lambda_{max}T) = 0{,}95$$

Elle est représentée par la partie hachurée de la figure ci-dessus.
La bande spectrale [$0{,}5\lambda_{max}$, $5\lambda_{max}$] est considérée comme l'intervalle spectral utile.

Exercice 05



$$\lambda_1 = 2\ \mu m \qquad \lambda_2 = 6\ \mu m \qquad \lambda_3 = \infty$$

$$\varepsilon(T) = \frac{0{,}1\int_0^2 M(\lambda, T)d\lambda + 0{,}4\int_2^6 M(\lambda, T)d\lambda + 0{,}2\int_6^\infty M(\lambda, T)d\lambda}{\sigma T^4}$$

$$\frac{\int_0^2 M(\lambda,T)d\lambda}{\sigma T^4} = F(\lambda_1 T) = F(4000) = 0{,}4814$$

$$\frac{\int_2^6 M(\lambda,T)d\lambda}{\sigma T^4} = F(\lambda_2 T) - F(\lambda_1 T) = F(12000) - F(4000) = 0{,}4628$$

$$\frac{\int_6^\infty M(\lambda,T)d\lambda}{\sigma T^4} = F(\lambda_3 T) - F(\lambda_2 T) = F(\infty) - F(12000) = 0{,}0557$$

$$\varepsilon(T) = 0{,}1.0{,}4814 + 0{,}4.0{,}4628 + 0{,}2.0{,}0557 = 0{,}2444$$

Exercice 06 : 1°) La puissance solaire reçue par le disque est égale à :

$$P_{reçue} = \frac{3{,}5.4{,}18}{60} = 0{,}2438\ \mathrm{W.cm^{-2}} = 2{,}438\ \mathrm{kW.m^{-2}}$$

A l'équilibre thermique, la puissance reçue est réémise par les deux faces du disque soit :

$$P_{reçue} = 2\,\sigma T^4 \qquad\qquad T = \left(\frac{P_{reçue}}{2\,\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 383\ \mathrm{K} = 110\ °\mathrm{C}$$

2°) Le disque reçoit la même puissance mais seule la face noircie réémet du rayonnement. On a :

$$P_{reçue} = \sigma T^4 \qquad\qquad T = \left(\frac{P_{reçue}}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 455\ \mathrm{K} = 182\ °\mathrm{C}$$

Exercice 07 : 1°) Dans l'échelle des longueurs d'onde l'emittance monochromatique est donnée par l'expression suivante :

$$M(\lambda,T) = \frac{2\,\pi\,h\,c^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_B T}\right) - 1} = C_1\frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

$$C_1 = 2\,\pi\,h\,c^2 = 3{,}7435.10^{-16}\ \mathrm{kg.m^4.s^{-3}} = 3{,}7435.10^{8}\ \mathrm{W.m^{-2}.\mu m^4}$$

$$C_2 = \frac{h\,c}{k_B} = 1{,}439.\,10^{-2}\ \mathrm{m.K} = 1{,}439.\,10^{4}\ \mathrm{\mu m.K}$$

L'émittance monochromatique pour la longueur d'onde $\lambda = 1\mu m$ est égale à :

$$M(\lambda = 1\mu m, T = 2000\ K) = 3{,}7435.\,10^{8}\ \frac{1^{-5}}{\exp\left(\frac{1{,}439.\,10^{4}}{1.2000}\right) - 1}$$

$$M(\lambda = 1\ \mu m, T = 2000\ K) = 281096\ \mathrm{W.m^{-2}.\mu m^{-1}}$$

2°) $$\lambda_{max} T = 2898 \qquad \lambda_{max} = 1{,}45\ \ \mu m$$

$$M(\lambda_{max} T) = B\ T^5$$

$$B = 1{,}287.\,10^{-11}\ \mathrm{W.m^{-2}.\mu m^{-1}.K^{-5}}\ \text{ si } \lambda_{max} \text{ en } \mu m$$

$$M(\lambda_{max}, T = 2000) = 421{,}840\ \mathrm{kW.m^{-2}.\mu m^{-1}}$$

3°) L'émittance totale est donnée par la loi de Stefan soit :

$$P = \sigma T^4 = 5{,}67.\,10^{-8}.\,2000^4 = 907200\ \mathrm{W.m^{-2}}$$

4°) L'émittance dans la bande $[0, \lambda]$ est égale à la moitié de l'émittance dans la bande $[\ \lambda, \infty]$.

$$F(\lambda T) = \frac{\int_0^{\lambda} M(\lambda T) d\lambda}{\int_0^{\infty} M(\lambda T) d\lambda} = 0{,}5$$

En se reportant aux deux tables on trouve :

$$\lambda T = 4120 \qquad \lambda = \frac{4120}{2000} = 2{,}06\ \mu m$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_{max}} = 1{,}416 \qquad \lambda_{max} = \frac{2898}{2000} = 1{,}449\ \mu m$$

$$\lambda = 1{,}449.1{,}416 = 2{,}05\ \ \mu m$$

Exercice 08 : 1°) Dans l'échelle des longueurs d'onde l'emittance monochromatique est donnée par l'expression suivante :

$$M(\lambda, T) = \frac{2\,\pi\,h\,c^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\,c}{\lambda\,k_B T}\right) - 1} = C_1\frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

$$C_1 = 2\,\pi\,h\,c^2 = 3{,}7435.\,10^{-16}\ \mathrm{kg.\,m^4.\,s^{-3}} = 3{,}7435.\,10^{8}\ \mathrm{W.\,m^{-2}.\,\mu m^4}$$

$$C_2 = \frac{h\,c}{k_B} = 1{,}439.\,10^{-2}\ \mathrm{m.\,K} = 1{,}439.\,10^{4}\ \mathrm{\mu m.\,K}$$

L'émittance monochromatique pour la longueur d'onde $\lambda = 1\,\mu m$ est égale à :

$$M(\lambda = 1\mu m, T = 1900\ K) = 3{,}7435.\,10^{8}\ \frac{1^{-5}}{\exp\left(\frac{1{,}439.\,10^4}{1.1900}\right) - 1}$$

$$M(\lambda = 1\ \mu m, T = 1900\ K) = 192{,}438\ \ \mathrm{kW.\,m^{-2}.\,\mu m^{-1}}$$

2°) $\lambda_{max} T = 2898$ $\lambda_{max} = 1{,}52\ \ \mu m$

$$M(\lambda_{max} T) = B\,T^5$$

$$B = 1{,}287.\,10^{-11}\ \mathrm{W.\,m^{-2}.\,\mu m^{-1}.\,K^{-5}}\quad \text{si}\ \ \lambda_{max}\ \ \text{en}\ \mu m$$

$$M(\lambda_{max}, T = 1900) = 318{,}674\ \mathrm{kW.\,m^{-2}.\,\mu m^{-1}}$$

3°)

$$\frac{M(\lambda = 1\ \mu m)}{M(\lambda = 1{,}52\ \mu m)} = 0{,}60$$

4°) L'émittance totale est donnée par la loi de Stefan soit :

$$P = \sigma T^4 = 5{,}67.\,10^{-8}.\,1900^4 = 738920\ \mathrm{W.\,m^{-2}}$$

Exercice 09 : La puissance totale émise par le soleil est égale à :

$$P = \sigma S T^4 = \sigma 4\pi R_S^2 T^4$$

$$P = \sigma 4\pi R_S^2 T_S^4 = 5{,}67.\,10^{-8}.\,4.\,\pi.\,(7.\,10^8)^2 (5800)^4 = 3{,}95.\,10^{26}\ \mathrm{W}$$

Jupiter est vue sous l'angle solide :

$$\Omega = \frac{S}{D_{S-T}^2} = \frac{\pi R_J^2}{D_{S-J}^2} = \frac{\pi\,.\,71400^2}{(7{,}8.\,10^8)^2} = 2{,}63.\,10^{-8}\ \text{stéradian}$$

La fraction d'énergie qui tombe sur la Terre est égale à :

$$\frac{\Omega}{4\pi} = 2{,}09.\,10^{-9}$$

La puissance reçue par Jupiter est :

$$P_{Reçue} = 3{,}95.\,10^{26}.\,2{,}09.\,10^{-9} = 8{,}26.\,10^{17}\ W$$

Si on suppose que la planète Jupiter rayonne comme un corps noir, à l'équilibre thermodynamique la puissance reçue par Jupiter est égale à la puissance émise par Jupiter soit :

$$P_{Emise} = \sigma 4\pi R_J^2 T_J^4 = P_{Reçue} = \frac{\Omega}{4\pi}\sigma 4\pi R_S^2 T_S^4$$

$$R_J^2 T_J^4 = \frac{\Omega}{4\pi} R_S^2 T_S^4 = \frac{\pi R_J^2}{4\pi.\,D_{S-J}^2} R_S^2 T_S^4$$

$$T_J = \sqrt{\frac{R_S}{2D_{S-J}}}\,T_S = 120\ K = 7°C$$

La longueur d'onde du rayonnement le plus probable émis par Jupiter est égale à :

$$\lambda_{max} T = 2898 \qquad \lambda_{max} = 24\ \mu m$$

Exercice 10 : Calcul de l'intégrale $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx$: Faisons une intégration par parties soit :

$$u = x \qquad dv = xe^{-ax^2}dx \qquad du = dx \qquad v = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du = \frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Calcul classique

1°)

$$E(x,p) = \frac{m\,\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{p^2}{2m}$$

$$P(E)dE = C\, e^{-\frac{E(x,p)}{k_B T}} dx\, dp \qquad \text{où} \qquad C\iint_0^\infty e^{-\frac{E(x,p)}{k_B T}} dx\, dp = 1$$

$$C\iint_0^\infty e^{-\frac{\frac{m\omega_0^2}{2}x^2+\frac{p^2}{2m}}{k_B T}} dx\, dp = C\int_0^\infty e^{-\frac{m\,\omega_0^2}{2k_B T}x^2} dx \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp = 1$$

$$C\,\frac{2\pi k_B T}{4\omega_0} = 1 \qquad\qquad C = \frac{4\omega_0}{2\pi k_B T}$$

$$P(E) = \frac{4\omega_0}{2\pi k_B T} e^{-\frac{m\,\omega_0^2}{2k_B T}x^2} e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}}$$

2°) L'énergie moyenne $\langle E\rangle$ est égale à :

$$\langle E\rangle = \frac{\iint_0^\infty E(x,p)\, e^{-\frac{E(x,p)}{k_B T}} dx\, dp}{\iint_0^\infty e^{-\frac{E(x,p)}{k_B T}} dx\, dp} = \frac{N}{D}$$

$$D = \iint_0^\infty e^{-\frac{\frac{m\omega_0^2}{2}x^2+\frac{p^2}{2m}}{k_B T}} dx\, dp = \int_0^\infty e^{-\frac{m\,\omega_0^2}{2k_B T}x^2} dx \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp = \frac{\pi k_B T}{2\omega_0}$$

Appliquons le résultat précédent au calcul des intégrales suivantes soit :

$$\int_0^\infty \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{p^2}{2m\,k_B T}} dp = \frac{k_B T}{4}\sqrt{2m\,\pi\,k_B T}$$

$$\int_0^\infty \frac{m\omega^2}{2} x^2 e^{-\frac{m\omega^2 x^2}{2\,k_B T}} dx = \frac{k_B T}{4}\sqrt{\frac{2\pi\,k_B T}{m\omega^2}}$$

$$N = \iint_0^\infty E(x,p)\, e^{-\frac{E(x,p)}{k_B T}} dx\, dp = \iint_0^\infty \left(\frac{m\,\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{p^2}{2m}\right) e^{-\frac{\frac{m\,\omega_0^2}{2}x^2+\frac{p^2}{2m}}{k_B T}} dx\, dp$$

$$N = \iint_0^\infty \frac{m\,\omega_0^2}{2}x^2 e^{-\frac{\frac{m\,\omega_0^2}{2}x^2+\frac{p^2}{2m}}{k_B T}} dx\, dp$$

$$+ \iint_0^\infty \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{\frac{m\,\omega_0^2}{2}x^2+\frac{p^2}{2m}}{k_B T}} dx\, dp = N_1 + N_2$$

$$N_1 = \frac{m\,\omega_0^2}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{m\,\omega_0^2}{2k_B T}x^2} dx \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp = \frac{k_B T}{4}\frac{\pi\, k_B T}{\omega_0}$$

$$N_2 = \int_0^\infty e^{-\frac{m\,\omega_0^2}{2k_B T}x^2} dx \int_0^\infty \frac{p^2}{2m} e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp = \frac{k_B T}{4}\frac{\pi k_B T}{\omega_0}$$

$$N = k_B T \frac{\pi\, k_B T}{2\omega_0} \qquad D = \frac{\pi k_B T}{2\omega_0} \qquad \langle E \rangle = \frac{N}{D} = k_B T$$

3°) $$u(\nu, T) = \frac{8\,\pi\ \nu^2}{c^3} k_B T \qquad \mathrm{J.m^{-3}.Hz^{-1}}$$

4°) $u(\lambda, T) d\lambda = u(\nu, T) d\nu \qquad u(\lambda, T) = u(\nu, T)\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{8\,\pi}{c}\frac{1}{\lambda^2} k_B T.\frac{c}{\lambda^2}$

$$u(\lambda, T) = 8\,\pi\, k_B T.\frac{1}{\lambda^4}$$

On remarque que la densité spectrale d'énergie tend vers l'infini dans le domaine des courtes longueurs d'onde. Ce résultat connu sous le nom de « catastrophe ultraviolette » est en contradiction avec les résultats expérimentaux.

Calcul quantique

1°) La densité de probabilité pour qu'un oscillateur ait une énergie $E_n = nh\nu$ est donnée par $P(E_n) = Ce^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ où C est un facteur de normalisation

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}} \quad \Rightarrow \quad P(E_n) = \frac{e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}$$

En utilisant le fait que : $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\,x} = \frac{1}{1-e^{-n\,x}}$

on obtient :

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}} \qquad\qquad P(E_n) = \frac{e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}}$$

2°) L’énergie moyenne $\langle E \rangle$ est égale à :

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}$$

Posons : $\varepsilon = h\,\nu \qquad E_n = n\,\varepsilon \qquad x = e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$

On obtient :

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

Comme $x < 1$ on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{(1-x)^{-1}} x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{(1-x)^{-1}} x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\varepsilon}{(1-x)^{-1}} x \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\varepsilon}{(1-x)} x$$

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon\,x}{(1-x)} = \frac{h\nu\, e^{-\frac{h\,\nu}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\,\nu}{k_B T}}\right)} = \frac{h\nu}{\left(e^{\frac{h\,\nu}{k_B T}} - 1\right)}$$

3°)

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}.\frac{h\nu}{\left(e^{\frac{h\,\nu}{k_BT}}-1\right)}=\frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\,\nu}{k_BT}}-1}\quad J.m^{-3}.Hz^{-1}$$

4°) L'expression de la densité spectrale d'énergie u (λ, T) dans l'échelle des longueurs d'onde s'écrit comme suit :

$$u(\lambda,T)d\lambda=u(\nu,T)d\nu\qquad u(\lambda,T)=u(\nu,T)\frac{d\nu}{d\lambda}=u(\nu,T)\frac{c}{\lambda^2}$$

$$u(\lambda,T)=\frac{8\,\pi\,hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{h\,c}{\lambda\,k_BT}}-1}$$

On remarque que la densité spectrale d'énergie tend vers zéro dans le domaine des courtes longueurs d'onde. Ce résultat, connu sous le nom de formule de Planck, est en accord avec les résultats expérimentaux.

L'introduction de la notion de la quantification des échanges d'énergie introduite par Planck a donné naissance à la physique quantique. Einstein a utilisé les résultats de Planck en imaginant la lumière comme constituée de grains d'énergie hν appelés photons. Il a pu ainsi expliquer l'effet photoélectrique.

Série du chapitre n°1 Effet photoélectrique

Exercice 01 : 1°) A partir du travail de sortie des électrons, on peut déterminer la longueur d'onde seuil soit :

$$W_s = h\nu_s = \frac{hc}{\lambda_s} \qquad \lambda_s = \frac{hc}{W_s}$$

$$\lambda_s = \frac{6{,}62.\,10^{-34}.\,3.\,10^{8}}{2{,}2.1{,}6.\,10^{-19}} = 5{,}642.10^{-7}\ \mathrm{m} = 5642\ \text{Å}$$

Comme la longueur d'onde du rayonnement émis par le laser soit λ = 3550 Å est inférieure à la longueur d'onde seuil $\lambda_s = 5642$ Å, on observera l'effet photoélectrique.

Le nombre de photons incidents par seconde sur la photocathode est donné par :

$$P = Nh\nu \qquad N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{10.\,10^{-3}.\,3550.10^{-10}}{6{,}62.\,10^{-34}.\,3.\,10^{8}}$$

$$N = 1{,}78.\,10^{16}\ \text{photons/seconde}$$

2°) L'énergie cinétique des électrons émis par la photocathode est égale à :

$$h\nu = W_s + E_c \qquad E_c = h\nu - W_s$$

$$E_i = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.\,10^{-34}.\,3.\,10^{8}}{3550.10^{-10}} = 5{,}594.\,10^{-19}\ \mathrm{J} = 3{,}49\ \mathrm{eV}$$

$$E_c = 3{,}49 - 2{,}2 = 1{,}29\ \mathrm{eV} \qquad v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 673518\ \mathrm{m/s}$$

3°) Si on éclaire la photocathode avec un rayonnement de longueur d'onde λ = 1 μm, il ne se passe rien car la longueur d'onde λ = 1 μm est plus grande que la longueur d'onde seuil $\lambda_s = 5642$ Å.

4°) Le rendement quantique est défini comme le rapport du nombre d'électrons émis par la photocathode en une seconde au nombre de photons qui éclairent la photocathode en une seconde.

Pour un rendement quantique égal à r, le nombre d'électrons émis par la photocathode en une seconde est égal au nombre de photons incidents multiplié par r soit :

$$r = \frac{n}{N} \qquad n = r\,N = 0{,}1.1{,}78.\,10^{16} = 1{,}78.\,10^{15}\ \text{électrons/seconde}$$

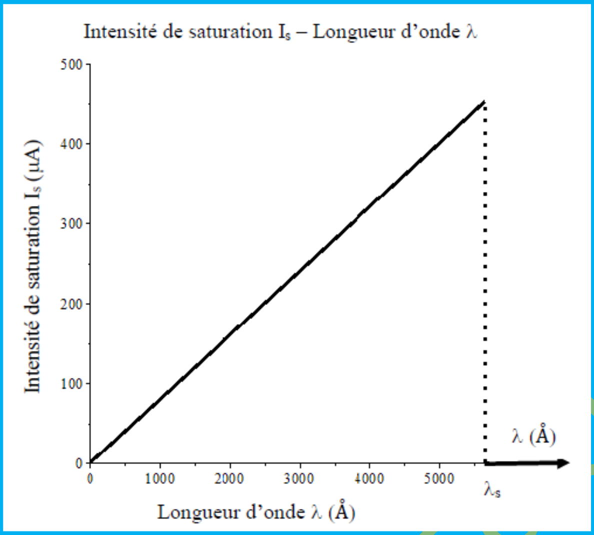
$$I_s = n\,e = r\,Ne = \frac{r\,e}{h\,c}P\lambda = \frac{0{,}1.1{,}6.\,10^{-19}}{6{,}62.\,10^{-34}.\,3.\,10^{8}}10.\,10^{-3}.3550.10^{-10}$$

$$I_s = 286.\,10^{-6}\ \text{A} = 286\ \mu\text{A}$$

La relation précédente montre que l'intensité de saturation I_s varie linéairement avec la longueur d'onde λ à puissance P constante. Pour des photons de fréquence inférieure à ν_s c'est-à-dire pour des longueurs d'onde supérieures à $\lambda_s = 5642$ Å , l'effet photoélectrique n'existe pas soit $I_s = 0$.
L'équation de la courbe est :

$$\lambda_s = 5642\ \text{Å} \qquad I_s(\lambda) = \begin{cases} I_s = \dfrac{r\,e}{h\,c}P\lambda = 0{,}08\,\lambda & \lambda < \lambda_s \\ I_s = 0 & \lambda > \lambda_s \end{cases}$$

L'intensité augmente avec la longueur d'onde parce qu'on a supposé la puissance P constante. En effet quand la longueur d'onde double c'est-à-dire la fréquence est divisée par deux, la puissance incidente est divisée par deux. Aussi pour travailler à puissance P il faut multiplier par deux le nombre de photons incidents.



Exercice 02 : 1°) La radiation de longueur d'onde $\lambda_1 = 2280$ Å a plus de chance de provoquer un effet photoélectrique que la radiation de longueur d'onde $\lambda_2 = 5240$ Å car $\lambda_1 < \lambda_2$.

Calculons la valeur de la longueur d'onde seuil λ_s de la cathode métallique.

$$W_s = h\nu_s \qquad \nu_s = \frac{W_s}{h} = \frac{3{,}42.1{,}6.10^{-19}}{6{,}62.10^{-34}} = 8{,}266.10^{14}\ \text{Hz}$$

$$\lambda_s = \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{8{,}266.10^{14}} = 3{,}630.10^{-7}\ \text{m} = 0{,}3630\ \mu\text{m}$$

Seule la radiation de longueur d'onde $\lambda_1 = 2280$ Å permet d'observer un effet photoélectrique car λ_1 est inférieure à la longueur d'onde seuil $\lambda_s = 3630$ Å.

2°) L'énergie cinétique E_c des électrons émis est donnée par :

$$h\nu_i = eV_{\text{arrêt}} + E_c \qquad E_c = h\nu_i - eV_{\text{arrêt}} = \frac{hc}{\lambda_i} - W_s$$

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_i} - W_s = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^8}{2280.10^{-10}} - 3{,}4.1{,}6.10^{-19} = 3{,}270.10^{-19}\ \text{J}$$

$$E_c = 2{,}04\ \text{eV}$$

$$v = \sqrt{2.\frac{3,27.10^{-19}}{0,9.10^{-30}}} = 8,52.10^5 \ \ m/s$$

La vitesse des électrons n'augmente pas si on augmente l'intensité du faisceau lumineux. Elle dépend uniquement de la différence entre la fréquence incidente et la fréquence seuil de la photocathode soit $E_c = h(\nu_i - \nu_s)$.

3°) La tension à appliquer ($V_A - V_C$) entre l'anode et la cathode pour qu'aucun électron n'atteigne l'anode doit être telle que :

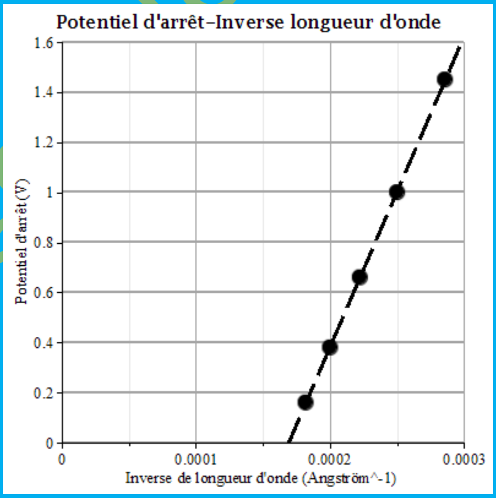
$$e(V_A - V_C) = E_C \qquad (V_A - V_C) = 2,04 \text{ Volt}$$

4°) $r = \frac{n}{N} \qquad I_S = ne \qquad P = Nh\nu$

$$P = \frac{n}{r}h\nu = \frac{I_S}{r\,e}h\frac{c}{\lambda} = \frac{1,2.10^{-6}}{2,5.10^{-3}.1,6.10^{-19}}6,62.10^{-34}\frac{3.10^8}{2280.10^{-10}}$$

$$P = 2,61 \text{ mW}$$

Exercice 03 :



1°) $\lambda_1 = 3500$ Å $\qquad h\nu_1 = W_s + eV_1 \quad (1)$

$\lambda_2 = 4000$ Å $\qquad h\nu_2 = W_s + eV_2 \quad (2)$

où W_S est le travail de sortie des électrons de la photocathode et V_1 et V_2 sont les potentiels d'arrêt pour les longueurs d'onde λ_1 et λ_2.

$$h(\nu_1 - \nu_2) = V_1 - V_2 \qquad h = \frac{e(V_1 - V_2)}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{e(V_1 - V_2)\lambda_1\,\lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$h = \frac{1{,}6.10^{-19}(1{,}45 - 1)3500.4000.10^{-20}}{3.10^{8}(4000 - 3500).10^{-10}} = 6{,}72.10^{-34}\ \mathrm{J.Hz^{-1}}$$

2°) $$W_s = h\nu_1 - eV_1 = \frac{6{,}72.10^{-34}.3.10^{8}}{3500.10^{-10}} - 1{,}6.10^{-19}.1{,}45$$

$$W_s = 3{,}44.10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}15\ \mathrm{eV}$$

3°) La longueur d'onde seuil est égale à :

$$W_s = h\nu_s = \frac{hc}{\lambda_s} \qquad \lambda_s = \frac{hc}{W_s} = \frac{6{,}72.10^{-34}.3.10^{8}}{3{,}44.10^{-19}} = 0{,}5860\ \mu\mathrm{m}$$

$$\lambda_s = 5860\ \text{Å}$$

Exercice 04 : I°) 1°) Le phénomène de l'effet photoélectrique met en évidence l'aspect corpusculaire de la lumière alors que les phénomènes d'interférence (fentes d'Young) et de diffraction mettent en évidence l'aspect ondulatoire.

La lumière se comporte comme une onde et comme une particule selon les conditions de l'expérience. On parle de dualité onde-particule

Ce caractère onde- particule sera généralisé en 1924 par de Broglie à la matière qui sera confirmé plus tard par l'expérience de Davisson et Germer en 1927.

2°) Les deux caractéristiques d'un photon sont l'énergie E et la quantité de mouvement p même s'il n'a pas de masse soit :

$$E = h\nu \quad \text{et} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

3°) Pour un métal pur donné, les photons incidents provoquent l'émission photoélectrique à condition que leur fréquence ν soit supérieure à la fréquence seuil ν_s qui est une caractéristique du métal.

On peut dire également que les photons incidents provoquent l'émission photoélectrique à condition que leur longueur d'onde λ soit inférieure à la longueur d'onde seuil λ_s qui est une caractéristique du métal.

II°) La relation d'Einstein relative à l'effet photoélectrique s'écrit comme suit :

$$h\nu = W_S + E_c$$

où $h\nu$, W_S et E_c représentent respectivement l'énergie du photon incident, le travail d'extraction ou de sortie de l'électron du métal et l'énergie cinétique de l'électron émis par la photocathode.

$$E_c = h\nu - W_S = a\nu + b \quad \text{avec} \quad a = h \quad \text{et} \quad b = -W_S$$

Les cinq points expérimentaux se trouvent sur une droite dont l'équation est :

$$E_c = a\nu + b$$

La pente a, en $eV.Hz^{-1}$, de la droite est donnée par :

$$a = h = \frac{(1{,}85 - 0{,}25)}{(10 - 6)10^{14}} = 4.10^{-15}\ eV.Hz^{-1} = 6{,}4.10^{-19}\ J.Hz^{-1}$$

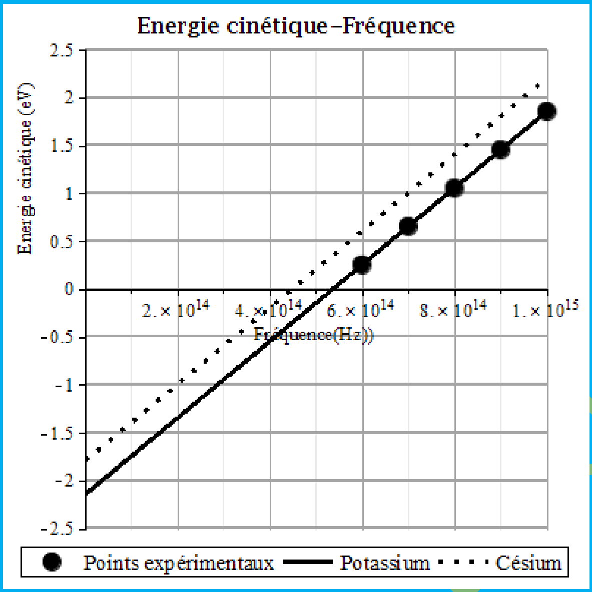
L'équation de la droite est :

$$E_c(eV) = 4.10^{-15}\ \nu - 2{,}15$$

L'ordonnée à l'origine b, égale à $(-W_S)$, soit $W_S = 2{,}15$ eV.

La fréquence seuil ν_s du potassium est égale à :

$$W_S = h\nu_S \qquad \nu_S = \frac{W_S}{h} = \frac{2{,}15.1{,}6.10^{-19}}{6{,}4.10^{-34}} = 5{,}375.10^{14}\ Hz$$



III°) Pour le césium, la droite est parallèle à celle du potassium ; Elle passe par le point de coordonnée $E_c = 1$ eV et $\nu = 7.10^{14}$ Hz. Son équation est :

$$E_c(\mathrm{eV}) = 4.10^{-15}\,\nu - 1{,}8$$

L'énergie d'extraction W_S du césium est égale à $W_S = 1{,}8$ eV.

Exercice 05 : 1°) $E = h\nu = 6{,}62.10^{-34}.9.10^{14} = 5{,}958.10^{-19}$ J

2°) L'énergie minimale nécessaire pour effacer l'information est égale à 40,5 µJ.

Le nombre de photons nécessaire à l'effacement de l'information est égale à :

$$N = \frac{40{,}5.10^{-6}}{5{,}958.10^{-19}} = 68.10^{12}\ \text{photons}$$

3°) Quelle est la puissance p issue du rayonnement solaire qui tombe sur la puce dont la surface est de $1{,}8.\ 10^{-9}$ m^2 ?

$$p = 25.1{,}8.10^{-9} = 45\ \mathrm{nW} = 45\ \mathrm{nJ/s}$$

Combien de temps faudra-t-il pour obtenir une énergie égale à 40,5 µJ ?

$$t = \frac{40{,}5.10^{-6}}{45.10^{-9}} = 900\ \mathrm{s} = 15\ \text{minutes}$$

Le temps nécessaire pour effacer l'information est égal à 15 minutes.
L'exposition de la puce au rayonnement solaire pendant 15 minutes suffit à effacer l'information enregistrée.

Exercice 06 : 1°) Déterminons l'équation de la droite qui passe par les quatre points dont l'énergie cinétique maximale est positive soit :

$$E_c = a\nu + b$$

La pente a, en $eV.Hz^{-1}$, de la droite est donnée par :

$$a = \frac{(11 - 1{,}9)}{(3{,}7 - 1{,}5)10^{15}} = 4{,}13.10^{-15}\ \mathrm{eV.Hz^{-1}} = 6{,}61.10^{-19}\ \mathrm{J.Hz^{-1}}$$

L'équation de la droite est :

$$E_c(eV) = 4{,}13.10^{-15}\ \nu + b \qquad b = E_c - 4{,}13.10^{-15}\ \nu$$

$$b = E_c - 4{,}13.10^{-15}\ \nu$$

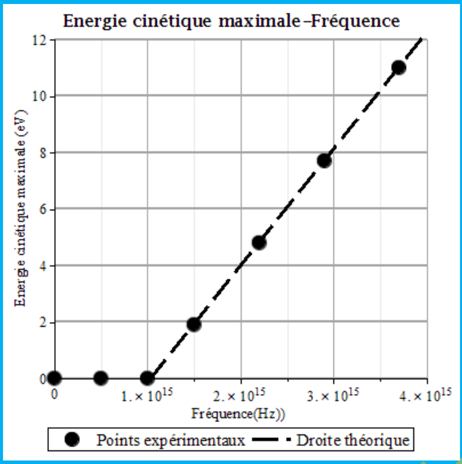
Pour le point $E_c = 11$ eV et $\nu = 3{,}7.\ 10^{15}$ Hz on obtient : $b = -4{,}28$ eV.

$$E_c(eV) = 4{,}13.10^{-15}\ \nu - 4{,}28$$

La fréquence pour laquelle l'énergie cinétique des électrons est nulle est égale à $\nu_s = 1{,}01.\ 10^{15}$ Hz.

3°) La pente de la droite donne la valeur de la constante de Planck soit :

$$a = h = 4{,}1310^{-15}\ \mathrm{eV.Hz^{-1}} = 6{,}61.10^{-19}\ \mathrm{J.Hz^{-1}}$$



Exercice 07 : 1°) La fréquence minimale qui donne naissance à l'effet photoélectrique s'appelle fréquence seuil.

$$W_S = h\nu_s = 6{,}62.10^{-34}.3{,}33.10^{14} = 2{,}20.10^{-19}\ \mathrm{J}$$

2°) $h\nu = W_S + E_c \qquad E_c = h\nu - W_S = h(\nu - \nu_s)$

$$E_c = 6{,}62.10^{-34}.2{,}33.10^{14} = 1{,}54.10^{-19}\ \mathrm{J} = 0{,}96\ \mathrm{eV}$$

L'énergie cinétique acquise par les électrons après accélération est égale à (2000 + 0,96) eV. La vitesse des électrons est égale à :

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2.2000{,}96.1{,}6.10^{-19}}{0{,}91.10^{-30}}} = 2{,}6.10^{7}\ \mathrm{m/s}$$

Exercice 08 : 1°) L'effet photoélectrique peut avoir lieu car l'énergie des photons incidents est supérieure au travail de sortie des électrons.

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{4000.10^{-10}} = 4{,}965.10^{-19}\ \mathrm{J} = 3{,}10\ \mathrm{eV}$$

$$h\nu > W_S$$

2°) On écrit la loi de conservation de l'énergie soit :

$$h\nu = W_S + E_c \qquad E_c = h\nu - W_S = 0{,}60\ \mathrm{eV}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2.0{,}6.1{,}6.10^{-19}}{0{,}91.10^{-30}}} = 4{,}6.10^5 \ \text{m/s}$$

3°) Si on inverse la polarité, on repousse les électrons.

$$-eU_0 \geq E_c = h\nu - W_S = 0{,}6 \text{ eV} \qquad e < 0$$

où U_0 négatif est le potentiel d'arrêt. Quand U_0 = - 0,6 Volts aucun électron n'arrive sur l'anode.

4°) A la sortie de la cathode, les électrons ont une énergie cinétique égale à :

$$E_c = h\nu - W_S + eU = 3{,}1 - 2{,}5 + 10 = 10{,}6 \text{ eV}$$

5°) On atteint le courant de saturation car tous électrons émis par la cathode arrivent sur l'anode.

6°) Comme le rendement quantique r est le rapport du nombre d'électrons n émis par la cathode en une seconde au nombre N de photons qui éclairent la cathode en une seconde, on écrit : $r = \frac{n}{N}$

La puissance lumineuse permet de déterminer N soit :

$$P = Nh\nu \qquad N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{10^{-4}.4000.10^{-10}}{6{,}62.10^{-34}.3.10^8}$$

$$N = 2.10^{14} \text{ photons/seconde}$$

$$I_S = ne \qquad n = \frac{I_S}{e} = \frac{1{,}6.10^{-6}}{1{,}6.10^{-19}} = 10^{13} \text{ électrons/seconde}$$

$$r = \frac{10^{13}}{2.10^{14}} = 0{,}05$$

7°) Pour augmenter le courant de saturation, il faut augmenter la puissance

lumineuse P de façon à augmenter le nombre d'électrons n au niveau de la cathode. Quant on diminue la longueur d'onde λ de la lumière incidente, on augmente uniquement la vitesse de électrons sans augmenter le nombre d'électrons émis par la cathode.

Exercice 09 : 1°) On calcule la longueur d'onde seuil λ_s.

$$W_S = h\nu_s = \frac{hc}{\lambda_s} \qquad \lambda_s = \frac{hc}{W_S} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{2{,}48.1{,}6.10^{-19}} = 5.00510^{-7}\text{m}$$

$$\lambda_s = 5005\ \text{Å}$$

Comme la longueur d'onde λ est inférieure à la longueur d'onde seuil λ_s, on observe un effet photoélectrique.

2°) Le nombre de photons incidents N reçus par la surface métallique par seconde se calcule à partir de la puissance lumineuse P soit :

$$P = Nh\nu \qquad N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{10.10^{-3}.3000.10^{-10}}{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}$$

$$N = 1{,}5.10^{16}\ \text{photons par seconde}$$

$$h\nu = W_S + E_c \qquad E_c = \frac{hc}{\lambda} - W_S = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{3000.10^{-10}} - 2{,}48.1{,}6.10^{-19}$$

$$E_c = 2{,}652.10^{-19}\ \text{J} = 1{,}657\ \text{eV}$$

Pour arrêter les électrons il faut appliquer une tension inverse de valeur V_A-V_C = -1,657 Volts. La tension d'arrêt vaut – 1,657 Volts pour la longueur d'onde λ = 3000 Å.

Le potentiel d'extraction W_S des électrons dépend uniquement de la nature de la photocathode alors que la tension d'arrêt dépend de la fréquence du rayonnement qui éclaire la photocathode. Si on change la fréquence du rayonnement incident, le potentiel d'arrêt change alors que le potentiel d'extraction reste inchangé.

3°) Les électrons quittent la photocathode avec une énergie cinétique initiale égale à E_{ci} = 1,657 eV. Si on applique une tension V_A-V_C = +10 Volts, alors l'énergie cinétique de électrons au niveau de l'anode est égale à :

$$E_{cFinale} = E_{cInitiale} + e(V_A - V_c) = 1{,}657 + 10 = 11{,}657 \text{ eV}$$

La vitesse des électrons au niveau de l'anode vaut :

$$v = \sqrt{\frac{2E_{cFinale}}{m}} = \sqrt{\frac{2.11{,}657.1{,}6.10^{-19}}{0{,}91.10^{-30}}} = 2.10^{6} \text{ m/s}$$

En supposant que chaque photon incident libère un électron c'est-à-dire que le rendement quantique est égal à l'unité, l'intensité de saturation I_s est égale à :

$$I_s = Ne = \frac{P\,\lambda\,e}{h\,c} = \frac{10.10^{-3}.3000.10^{-10}.1{,}6.10^{-19}}{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}} = 2{,}4 \text{ mA}$$

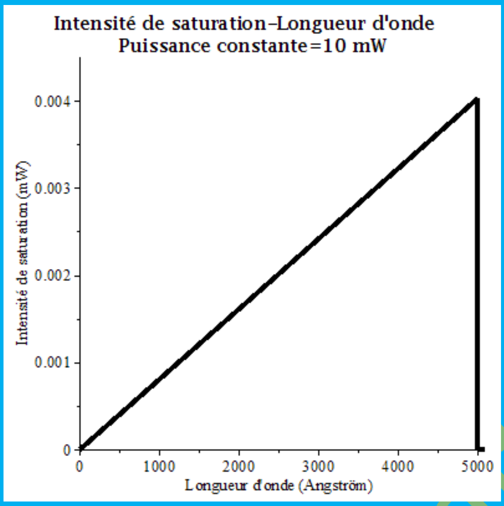
Le courant de saturation I_s est indépendant de la tension anode.

4°) Le courant de saturation est une fonction linéaire de la longueur d'onde $0 < \lambda \leq \lambda_s$. La pente de la droite est égale à $\frac{P\,e}{h\,c}$ à puissance lumineuse P constante.

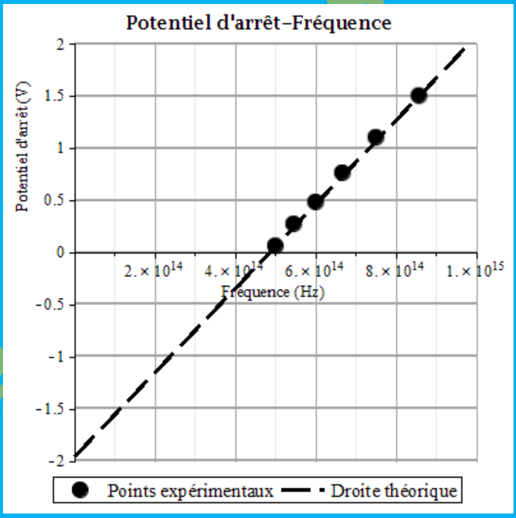
$$I_s = \frac{P\,e}{h\,c}\lambda = 8056{,}4\,\lambda(\text{m}) = 0{,}80564.10^{-6}\,\lambda(\text{Å})$$

$$\begin{cases} I_s = 0{,}80564.10^{-6}\,\lambda(\text{Å}) & \lambda \leq \lambda_s = 5005 \text{ Å} \\ I_s = 0 & \lambda > \lambda_s = 5005 \text{ Å} \end{cases}$$

5°) Il n'y a pas d'effet photoélectrique car la longueur d'onde λ = 1 µm est plus grande que la longueur d'onde seuil $\lambda_s = 5005$ Å.



Exercice 10 : 1°) Les points expérimentaux se trouvent sur une droite dont la pente est égale à $4{,}0336.10^{-15}$ $V.Hz^{-1}$ et l'ordonnée à l'origine -1,9573 Volts.



L'équation de la droite est :

$$V = 4{,}03.\,10^{-15}\nu - 1{,}95$$

2°) La conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$h\nu = W_S + E_c \qquad\qquad E_c = h\nu - W_S$$

Le potentiel d'arrêt, pour une fréquence donnée, sera déterminé par la valeur de la tension inverse qu'il faut appliquer pour annuler l'énergie cinétique des électrons émis par la photocathode soit :

$$eV = h\nu - W_S \qquad V = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_S}{e}$$

En identifiant l'équation de la droite expérimentale avec l'équation de la droite théorique on obtient :

$$\frac{h}{e} = 4{,}03.10^{-15} \qquad h = 6{,}45.10^{-15}\ J.Hz^{-1}$$

$$\frac{W_S}{e} = 1{,}95\ \text{Volts} \qquad W_S = 1{,}95\ eV$$

La fréquence seuil est égale à :

$$V = 4{,}03.10^{-15}\nu_s - 1{,}95 = 0 \qquad \nu_s = 4{,}838.10^{15}\ Hz$$

$$\lambda_s = \frac{c}{\nu_s} = 6{,}2.10^{-7}\ m = 6200\ \text{Å}$$

Exercice 11 : 1°) Pour annuler le courant photo-électronique, il faut appliquer une tension de 0,4 volt, ce qui signifie que les électrons ayant une énergie cinétique maximale ne pourront pas quitter la photocathode.

$$E_{c,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 0{,}4\ eV = 0{,}64.10^{-19}\ J$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{c,max}}{m}} = 3{,}75.10^5\ m/s$$

$$W_S = \frac{hc}{\lambda_S} \qquad \lambda_S = \frac{hc}{W_S} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^8}{1{,}91.1{,}6.10^{-19}} = 6{,}4987.10^{-7}\ m$$

$$\lambda_S = 6498{,}7\ \text{Å}$$

L'énergie E du photon incident est égale à :

$$E = E_{c,max} + W_S = 2{,}31\ \text{eV} \qquad E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}62.\,10^{-34}.\,3.\,10^{8}}{2{,}31.1{,}6.\,10^{-19}} = 5{,}3734\ 10^{-7}\ \ \text{m} = 5373{,}4\ \text{Å}$$

2°) La puissance incidente P et le courant de saturation I_S sont égaux à :

$$P = Nh\nu = N\frac{hc}{\lambda} \qquad I_S = ne$$

$$S = \frac{I_S}{P} = \frac{ne\lambda}{Nhc} = \frac{n}{N}\frac{e\lambda}{hc} = r\frac{e\lambda}{hc}$$

$$S(\lambda_1) = r\frac{e\lambda_1}{hc} \qquad r = S(\lambda_1)\frac{hc}{e\lambda_1}$$

$$r = 85.\,10^{-3}\ \frac{6{,}62.\,10^{-34}.\,3.\,10^{8}}{1{,}6.\,10^{-19}.\,3700.\,10^{-10}} = 0{,}285$$

Série du chapitre n°1 Effet Compton

Exercice 01 : L'énergie E du photon diffusé dans la direction θ en fonction de l'énergie E_0 du photon incident est donnée par l'expression :

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0 c^2}$$

1°) Diffusion simple à un angle de 180° :

$$E_0 - E_1 = E_0\left[\frac{\alpha(1 - \cos\pi)}{1 + \alpha(1 - \cos\pi)}\right] = E_0\left[\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}\right]$$

2°) Deux diffusions successives chacune avec un angle de 90° :

$$E_1 = \frac{E_0}{1 + \alpha\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{E_0}{1 + \alpha} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0 c^2}$$

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \alpha'\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{E_1}{1 + \alpha'} \quad \alpha' = \frac{E_1}{m_0 c^2} = \frac{1}{m_0 c^2}\frac{E_0}{1 + \alpha} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \alpha'} = \frac{E_1}{1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}} = E_1\frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} = \frac{E_0}{1 + 2\alpha}$$

$$E_0 - E_2 = E_0 - \frac{E_0}{1 + 2\alpha} = E_0\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$$

3°) Trois diffusions successives chacune avec un angle de 60° :

$$E_1 = \frac{E_0}{1 + \alpha\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)} = E_0\frac{2}{2 + \alpha} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0 c^2}$$

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \alpha'\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)} = E_1\frac{2}{2 + \alpha'} \qquad \alpha' = \frac{E_1}{m_0 c^2} = \frac{2\alpha}{2 + \alpha}$$

$$E_2 = E_0 \frac{2}{2+\alpha} \frac{2}{2+\frac{2\alpha}{2+\alpha}} = E_0 \frac{1}{1+\alpha}$$

$$E_3 = \frac{E_2}{1+\alpha''\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)} = E_2 \frac{2}{2+\alpha''}$$

$$\alpha'' = \frac{E_2}{m_0c^2} = \frac{E_1}{m_0c^2}\frac{2}{2+\alpha'} = \frac{2\alpha'}{2+\alpha'} = \frac{4\alpha}{2+\alpha}\frac{1}{2+\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

$$\alpha'' = \frac{4\alpha}{2+\alpha}\frac{1}{2+\frac{2\alpha}{2+\alpha}} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$E_0 - E_3 = E_0 - E_2 \frac{2}{2+\frac{\alpha}{1+\alpha}} = E_0 - 2E_2 \frac{(1+\alpha)}{2+3\alpha}$$

$$E_0 - E_3 = E_0 - E_0 \frac{2}{2+3\alpha} = E_0 \frac{3\alpha}{2+3\alpha}$$

Les pertes d'énergie sont égales dans les cas 1°) et 2°). La perte d'énergie dans le cas 3°) est plus petite que celle dans les cas 1°) et 2°).

$$\alpha = \frac{E_0}{m_0c^2} = 0{,}1 \qquad \begin{cases} E_0 - E_1 = E_0 \dfrac{2\alpha}{1+2\alpha} = 8{,}51 \text{ keV} \\ E_0 - E_2 = E_0 \dfrac{2\alpha}{1+2\alpha} = 8{,}51 \text{ keV} \\ E_0 - E_3 = E_0 \dfrac{3\alpha}{2+3\alpha} = 6{,}66 \text{ keV} \end{cases}$$

Exercice 02 :

1°) $$\lambda_0 = \frac{12{,}4125}{E_0} = 0{,}1773 \text{ Å} = 17{,}73 \text{ pm}$$

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1-\cos\theta) = \lambda_c.0{,}1089 = 0{,}00264 \text{ Å}$$

$$\lambda = 0{,}1799 \text{ Å} = 17{,}99 \text{ pm}$$

On calcule directement l'énergie du photon de diffusion soit :

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0c^2} = \frac{70}{511} = 0{,}1369$$

$$E = \frac{70}{1 + 0{,}1369(1 - \cos 27°)} = 68{,}9708 \text{ keV} \qquad \lambda = 0{,}1799 \text{Å}$$

2°) Après collision le photon subit une rétrodiffusion c'est-à-dire θ =180°.

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 2\lambda_c$$

$$\lambda = \lambda_0 + 2\lambda_c = 2100{,}048 \text{ Å}$$

$$E_0 = \frac{12{,}4125}{\lambda_0} = \frac{12{,}4125}{2100} = 5{,}9107 \text{ eV}$$

$$E = \frac{12{,}4125}{\lambda} = \frac{12{,}4125}{2100{,}048} = 5{,}9105 \text{ eV}$$

$$T = E_0 - E = 0{,}214 \text{ meV}$$

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1 + \alpha)\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{(1 + \alpha)\tan\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad \varphi = 0$$

On est en présence d'une collision frontale (comme en mécanique classique), le photon diffusé se dirige vers l'arrière alors que l'électron part vers l'avant.

Dans le cas où λ_0 = 2,1 Å on trouve :

$$\lambda = \lambda_0 + 2\lambda_c = 2{,}1485 \text{ Å}$$

$$E_0 = \frac{12{,}4125}{\lambda_0} = \frac{12{,}4125}{2{,}100} = 5{,}9107 \text{ keV}$$

$$E = \frac{12{,}4125}{\lambda} = \frac{12{,}4125}{2{,}1485} = 5{,}777 \text{ keV}$$

$$E_c = E_0 - E = 133{,}7 \text{ eV}$$

$$\varphi = 0 \qquad \theta = 0$$

3°) $\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}$

$$\Delta\lambda = 0{,}32\ \text{pm} \qquad \cos\theta = 1 - \frac{0{,}32}{2{,}425} = 0{,}8680 \qquad \theta = 29{,}77°$$

$$\Delta\lambda = 1{,}215\ \text{pm} \qquad \cos\theta = 1 - \frac{1{,}215}{2{,}425} = 0{,}5010 \qquad \theta = 59{,}93°$$

$$\Delta\lambda = 2{,}430\ \text{pm} \qquad \cos\theta = 1 - \frac{2{,}430}{2{,}425} = -\,0{,}0020 \qquad \theta = 89{,}88°$$

4°) $\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$

$$\begin{cases} \theta = 0° & \Delta\lambda = 0 \\ \theta = 15° & \Delta\lambda = 0{,}0825\ \text{pm} \\ \theta = 45° & \Delta\lambda = 0{,}71\ \text{pm} \end{cases}$$

Exercice 03 : 1°) La valeur du décalage en longueur d'onde entre le photon incident λ_0 et le photon de diffusion λ dans la direction θ est égale à :

$$\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_0) = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \qquad \text{où} \qquad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}425\ \text{pm}$$

est la longueur d'onde Compton de l'électron.

L'énergie du photon de diffusion dans la direction θ est égale à :

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$$

$\alpha = \frac{E_0}{m_0 c^2}$ où $m_0 c^2 = 511$ keV est l'énergie de masse l'électron au repos.

L'énergie cinétique de l'électron E_c est égale à :

$$E_c = E_0 - E = E_0 \frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \tan\varphi = \frac{1}{(1 + \alpha)\tan\frac{\theta}{2}}$$

2°) L'énergie E_0 et la quantité de mouvement P_0 du photon incident s'obtiennent comme suit :

$$\lambda_0 = k\,\lambda_c = k\frac{h}{m_0c} \qquad E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{k\,\lambda_c} = \frac{hc}{kh}m_0c$$

$$E_0 = \frac{m_0c^2}{k} \qquad \text{et} \qquad P_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{m_0c}{k}$$

La longueur d'onde du photon de diffusion est égal à :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1-\cos\theta) \qquad \lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1-\cos\theta)$$

$$\lambda = \lambda_c(1+k-\cos\theta)$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_c(1+k-\cos\theta)} = \frac{hc.\,m_0c}{h(1+k-\cos\theta)}$$

$$E = \frac{m_0c^2}{(1+k-\cos\theta)}$$

La quantité de mouvement P_λ s'écrit comme suit :

$$P_\lambda = \frac{E}{c} = \frac{m_0c}{(1+k-\cos\theta)}$$

L'énergie cinétique de l'électron de recul est :

$$E_c = E_0 - E = m_0c^2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(1+k-\cos\theta)}\right]$$

$$E_c = m_0c^2\left[\frac{(1-\cos\theta)}{k(1+k-\cos\theta)}\right]$$

La quantité de mouvement de l'électron se calcule à partir des relations :

$$\begin{cases} E_e = E_0 - E + m_0c^2 \\ E_e^2 - m_0^2c^4 = P_e^2c^2 \end{cases}$$

où E_e et P_e sont respectivement l'énergie totale et le module de la quantité de mouvement de l'électron.

$$P_e^2c^2 = (E_0 - E + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4$$

$$P_e = \frac{1}{c}\sqrt{(E_0 - E + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4}$$

Pour calculer la relation entre l'angle d'émission φ de l'électron après la collision et l'angle d'émission θ du photon de diffusion, on utilise la condition de conservation de la quantité de mouvement soit :

$$\begin{cases} P_\lambda \sin\theta - P_e \sin\varphi = 0 \\ P_\lambda \cos\theta + P_e \cos\varphi = P_0 \end{cases}$$

$$\frac{P_e\sin\varphi}{P_e\cos\varphi} = \tan\varphi = \frac{P_\lambda \sin\theta}{P_0 - P_\lambda\cos\theta} = \frac{\dfrac{m_0c}{(1+k-\cos\theta)}\sin\theta}{\dfrac{m_0c}{k} - \dfrac{m_0c}{(1+k-\cos\theta)}\cos\theta}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{(1+k-\cos\theta)}\frac{k(1+k-\cos\theta)}{(1+k-\cos\theta) - k\cos\theta}$$

$$\tan\varphi = \frac{k}{(1+k)}\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}$$

Utilisons la relation de trigonométrie : $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)} = \frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

On obtient :

$$\tan\varphi = \frac{k}{(1+k)}\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

3°) Examinons les cas suivants avec $\lambda_c = 2{,}426$ pm :

$\mathbf{k = \frac{1}{2}}$ **et** $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$:

$\lambda_0 = 1{,}213$ pm $E_0 = 1022$ keV $P_0 = 5{,}45.10^{-22}$ kg.m.s^{-1}

$$\lambda = 2{,}426\ \mathrm{pm} \qquad E = 511\ \mathrm{keV} \qquad P_\lambda = 2{,}73.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$E_c = 511\ \mathrm{keV} \qquad P_e = 4{,}72.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}} \qquad \varphi = 30°$$

$\mathbf{k = 1\ et\ \theta = \frac{\pi}{2}}$ **:**

$$\lambda_0 = 2{,}426\ \mathrm{pm} \qquad E_0 = 511\ \mathrm{keV} \qquad P_0 = 2{,}73.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$\lambda = 4{,}852\mathrm{pm} \qquad E = 255{,}5\ \mathrm{keV} \qquad P_\lambda = 1{,}36.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$E_c = 255{,}5\ \mathrm{keV} \qquad P_e = 3{,}04.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}} \qquad \varphi = 26°,56$$

$\mathbf{k = 2\ et\ \theta = \frac{2\pi}{3}}$ **:**

$$\lambda_0 = 4{,}852\ \mathrm{pm} \qquad E_0 = 255{,}5\ \mathrm{keV} \qquad P_0 = 1{,}36.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$\lambda = 8{,}491\mathrm{pm} \qquad E = 146\ \mathrm{keV} \qquad P_\lambda = 7{,}78.10^{-23}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$E_c = 109{,}5\ \mathrm{keV} \qquad P_e = 1{,}87.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}} \qquad \varphi = 21°$$

Exercice 04 : Conservation de l'énergie : $E_0 - E = E_c \quad (1)$

Conservation de la quantité de mouvement ($\theta = \pi$ et $\varphi = 0$) :

$$P_0 = -P + P_e \Rightarrow \frac{E_0}{c} = -\frac{E}{c} + P_e \qquad (2)$$

Additionnons les équations (1) et (2), on obtient :

$$2E_0 = E_c + P_e c \qquad (3)$$

D'après la relativité on obtient l'équation suivante :

$$E_0 + m_0 c^2 = E + \sqrt{P_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

où le deuxième terme sous le radical représente l'énergie totale de l'électron après la collision.

$$E_0 - E + m_0c^2 = \sqrt{P_e^2c^2 + m_0^2c^4} \qquad E_c + m_0c^2 = \sqrt{P_e^2c^2 + m_0^2c^4}$$

$$(E_c + m_0c^2)^2 = P_e^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad (4)$$

Remplaçons la valeur de P_ec de l'équation (3) dans l'équation (4), on obtient :

$$(E_c + m_0c^2)^2 = (2E_0 - E_c)^2 + m_0^2c^4$$

$$2E_0^2 - 2E_0E_c - E_c.m_0c^2 = 0$$

La résolution de cette équation du second degré en E_0 admet une seule solution physiquement acceptable soit :

$$E_0 = \frac{E_c}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{E_c}}\right)$$

$E_0 = 10$ MeV

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \theta = \pi \qquad E = \frac{E_0}{1 + 2\alpha} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0c^2}$$

$$E_c = E_0 - E = E_0\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} \qquad \alpha = 19{,}57$$

$$E_c = 9{,}75 \text{ MeV}$$

Exercice 05 : 1°) Les énergies totales E_0 et E_{e1} du photon incident et de l'électron avant le choc sont égales à :

$$E_0 = h\nu_0 \qquad E_{e1} = m_0c^2$$

2°) La loi de conservation de l'énergie est :

$$E_0 + E_{e1} = E_1 + E_{e2} \qquad \text{où} \qquad E_{e2} = \sqrt{m_0^2c^4 + P_{e2}^2c^2}$$

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + \sqrt{m_0^2c^4 + P_{e2}^2c^2}$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\theta = P_{e2}\cos\varphi \qquad\qquad \frac{h\nu}{c}\sin\theta = P_{e2}\sin\varphi$$

3°)

$$\left(\frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\sin\theta\right)^2 = P_{e2}^2$$

$$(h\nu_0 - h\nu) + m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + P_{e2}^2c^2}$$

Elevons au carré la relation ci-dessus soit :

$$(h\nu_0 - h\nu)^2 + 2m_0c^2(h\nu_0 - h\nu) = P_{e2}^2c^2$$

Remplaçons la quantité P_{e2}^2 par l'expression ci-dessus. On obtient :

$$(h\nu_0 - h\nu)^2 + 2m_0c^2(h\nu_0 - h\nu) = (h\nu_0 - h\nu\cos\theta)^2 + (h\nu\sin\theta)^2$$

$$h\nu\, h\nu_0(1 - \cos\theta) = m_0c^2(h\nu_0 - h\nu)$$

Après un calcul simple on trouve le décalage en longueur d'onde soit :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

4°)

$$\begin{cases} P_{e2}\sin\varphi = \frac{h\nu}{c}\sin\theta \\ P_{e2}\cos\varphi = \frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\theta \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{h\nu\sin\theta}{h\nu_0 - h\nu\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{\nu_0}{\nu} - \cos\theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \tan\varphi = \frac{\nu}{\nu_0}$$

5°) L'énergie cinétique de l'électron est égale à :

$$E_c = h\nu_0 - h\nu$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu_0} + \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\nu = \frac{1}{\frac{1}{\nu_0} + \frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)} = \frac{\nu_0 m_0 c^2}{m_0c^2 + h\nu_0(1 - \cos\theta)}$$

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)} = \frac{h\nu_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \alpha = \frac{h\nu_0}{m_0c^2}$$

$$E_c = h\nu_0 - h\nu = h\nu_0\left[1 - \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}\right]$$

$$E_c = h\nu_0\left[\frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}\right] = h\nu\,\alpha(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{E_c}{h\nu_0} = \frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \quad \text{et} \quad \frac{E_c}{h\nu} = \alpha(1 - \cos\theta)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \frac{E_c}{h\nu_0} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{E_c}{h\nu} = \alpha$$

Exercice 06 :

1°) $\lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad \lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 0{,}0242\ \text{Å}$

2°) Ecrivons la loi de conservation d'énergie lors de l'absorption du photon par l'électron au repos (énergie avant la collision égale à l'énergie après la collision) soit :

$$pc + m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

où pc et $\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ représente respectivement l'énergie du photon et l'énergie totale de l'électron qui est différente de l'énergie cinétique de l'électron.

Après élévation au carré des deux membres, on obtient :

$$2pc.\,m_0c^2 = 0$$

On arrive au résultat suivant : la quantité E = pc doit être nulle car m_0 et c sont non nulles. En conclusion, il n'est pas possible que le photon soit absorbé par l'électron libre.

3°) Ecrivons la loi de conservation de la quantité de mouvement soit :

$$\frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\theta = p\cos\varphi \qquad\qquad \frac{h\nu}{c}\sin\theta = p\sin\varphi$$

$$\begin{cases} p\sin\varphi = \dfrac{h\nu}{c}\sin\theta \\ p\cos\varphi = \dfrac{h\nu_0}{c} - \dfrac{h\nu}{c}\cos\theta \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{h\nu\sin\theta}{h\nu_0 - h\nu\cos\theta} = \frac{E\sin\theta}{E_0 - E\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{E_0}{E} - \cos\theta}$$

Exprimons l'énergie E du photon diffusé en fonction de l'énergie du photon incident E_0.

$$(\lambda - \lambda_0) = \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad\qquad \frac{c}{h\nu} - \frac{c}{h\nu_0} = \frac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{h}$$

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{h} \qquad\qquad \frac{E_0}{E} = 1 + E_0\frac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{h}$$

On pose : $\alpha = \frac{E_0}{m_0c^2}$ où $m_0\,c^2 = 511$ keV est l'énergie de masse l'électron au repos.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{1 + E_0\dfrac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{h\,c}} = \frac{1}{1 + \dfrac{E_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)} = \frac{1}{1 + \alpha(1-\cos\theta)}$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \tan\varphi = \frac{E \sin\theta}{E_0 - E \cos\theta}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{E_0}{E} - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1 + \ \alpha(1 - \cos\theta) - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{(1 + \alpha)(1 - \cos\theta)}$$

Utilisons la relation de trigonométrie :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{(1 + \cos\theta)} = \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$$

On obtient :

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1 + \alpha)\tan\frac{\theta}{2}}$$

4°) Dans l'expérience Compton les photons peuvent être diffusés vers l'avant et vers l'arrière :

$$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \tan\frac{\theta}{2} \leq \infty \quad \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Les électrons sont éjectés vers l'avant.

5°) Comme les photons incidents se dirigent vers la droite (sens positif de l'axe y), on peut dire que l'électron sera également émis dans la même direction que les rayons incidents.

Comme l'épaisseur de l'échantillon est très petite (de l'ordre de quelques dixièmes de microns, le photon de diffusion émis au point D sera émis de façon quasiment perpendiculaire à l'axe y ($\theta = 90°$).

L'électron issu du point C, crée par le photon de diffusion issu du point D, se dirige vers le sens négatif de l'axe y.

Les électrons émis aux points D et C ne sont pas parallèles à l'axe y comme cela est indiqué sur la figure car dans chaque cas le coefficient α n'est pas nul.

6°)

a. L'énergie du premier photon diffusé, pour la valeur $\theta_1 = 90°$, est égale à :

$$E_1 = \frac{E_0}{1+\alpha_1} \quad \text{où} \quad \alpha_1 = \frac{E_0}{m_0c^2} = \frac{10}{511} = 0{,}01957$$

$$E_1 = 9{,}808 \ \text{keV}$$

b. L'énergie cinétique E_{c1} du premier électron Compton est égale à :

$$E_{c1} = E_0 - E_1 = 0{,}192 \ \text{keV}$$

Son angle d'émission vaut :

$$\tan\varphi_1 = \frac{1}{(1+\alpha_1)\tan\frac{\theta_1}{2}} = \frac{1}{(1+\alpha_1)} = 0{,}9808 \qquad \varphi_1 = 44{,}44°$$

7°) a. Les électrons Compton vont décrire, dans le champ magnétique uniforme B, un mouvement circulaire uniforme de rayon R avec une vitesse v telle que :

$$|e|vB = m_0\frac{v^2}{R} \qquad v = \frac{|e|B\,R}{m_0}$$

Connaissant les rayons R_1 et R_2 des trajectoires circulaires décrites par les deux électrons, on peut déduire l'énergie cinétique du deuxième électron à partir de l'énergie cinétique du premier électron.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \qquad E_{c2} = E_{c1}\frac{R_2^2}{R_1^2} = 0{,}192 . 1{,}3^2 = 0{,}324 \ \text{keV}$$

L'énergie E_2 du second photon de diffusion est égale à :

$$E_1 - E_2 = E_{c2} \qquad E_2 = E_1 - E_{c2} = 9{,}808 - 0{,}324 = 9{,}484 \ \text{keV}$$

L'angle de diffusion θ_2 du second photon s'obtient à partir de l'énergie E_2.

$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \alpha_2(1 - \cos\theta_2)} \quad \text{où} \quad \alpha_2 = \frac{E_1}{m_0c^2} = \frac{9{,}808}{511} = 0{,}01919$$

$$\alpha_2(1 - \cos\theta_2) = \frac{E_1}{E_2} - 1 = 0{,}03416$$

$$(1 - \cos\theta_2) = 1{,}7802 \qquad \cos\theta_2 = -0{,}7802 \qquad \theta_2 = 141{,}28°$$

b.

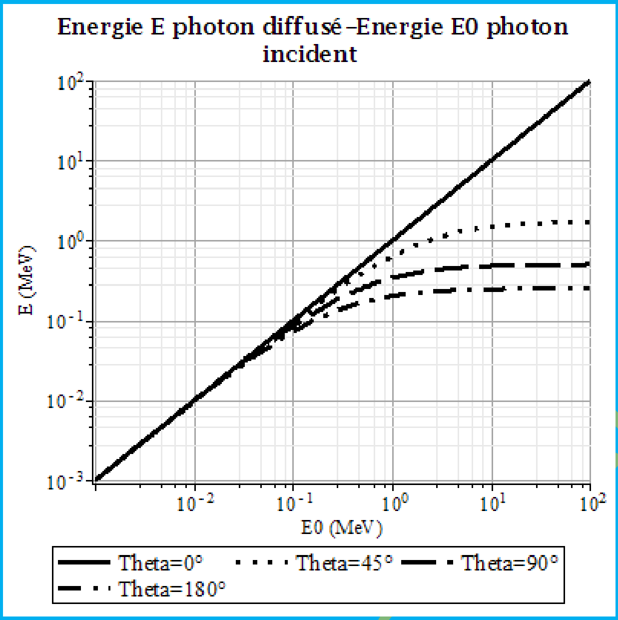
$$\tan\varphi_2 = \frac{1}{(1 + \alpha_2)\tan\frac{\theta_2}{2}} = 0{,}7958 \qquad \varphi_2 = 38{,}5°$$

Exercice 07 : Les valeurs de l'énergie E du photon diffusé en fonction de l'énergie du photon incident E_0 sont égales à :

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0c^2}$$

Quand l'énergie du photon incident E_0 est supérieure à 1 MeV, l'énergie E du photon diffusé s'écrit comme suit :

$$E \cong \frac{m_0c^2}{(1 - \cos\theta)} = \frac{511}{(1 - \cos\theta)}$$

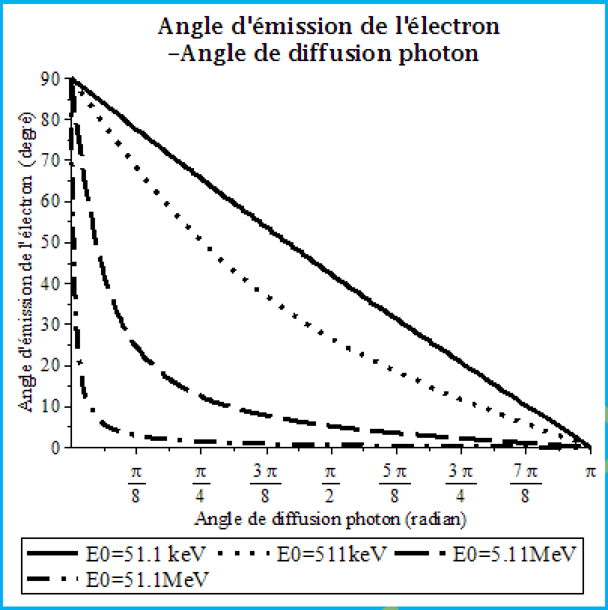


$$\begin{cases} \theta = 45° & E = 1{,}745 \text{ MeV} \\ \theta = 90° & E = 0{,}511 \text{ MeV} \\ \theta = 180° & E = 0{,}2555 \text{ MeV} \end{cases}$$

Quand l'énergie E_0 du photon incident est inférieure à 0,01 MeV, l'énergie E du photon diffusé devient égale à l'énergie E_0 du photon incident soit $E= E_0$ et ceci quelle que soit la valeur θ de l'angle de diffusion.

Dans ce cas la valeur de l'énergie cinétique de l'électron $E_c = E_0 - E$ est nulle. On peut dire que la collision est pratiquement élastique aux basses énergies. L'angle φ d'éjection de l'électron en fonction de l'angle θ de diffusion du photon s'écrit comme suit :

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}} \qquad \alpha = \frac{E_0}{m_0c^2}$$



La figure ci-dessus montre la dépendance de l'angle φ en fonction de l'angle θ. On constate que lorsque θ = 0° on a φ = 90° et lorsque θ =180° on a φ = 0° et cela quelle que soit la valeur de l'énergie E_0 du photon incident.

On remarque également que l'émission de l'électron se fait toujours vers l'avant soit 0 < φ < 90°.

Pour des valeurs de α très petites soit $E_0 \ll m_0c^2 = 511$ keV, on obtient :

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}} \cong \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

L'angle d'émission φ de l'électron décroit de 90° à 0° lorsque l'angle d'émission θ du photon de diffusion croit de 0° à 180°.

Pour des valeurs de α très grandes soit $E_0 \gg m_0c^2 = 511$ keV, on obtient :

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}} \cong \frac{1}{\alpha\tan\frac{\theta}{2}}$$

Les déviations φ de l'électron se font principalement pour des faibles valeurs de l'angle d'émission θ du photon de diffusion.

Pour chaque valeur de l'énergie E_0 du photon incident, quand es-ce-qu'on aura $\varphi = \theta$ (émission symétrique de l'électron et du photon) ? Pour cela on utilisera la relation de trigonométrie suivante :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}} \qquad (2+2\alpha)\tan^2\frac{\theta}{2} = 1-\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$(3+2\alpha)\tan^2\frac{\theta}{2} = 1 \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{(3+2\alpha)}}$$

α	E_0 (MeV)	$\theta = \varphi$ (°)
0,1	0,0511	58,4
1	0,511	53,12
10	5,11	31
100	51,1	11,25

Pour E_0 = 51,1 MeV, tous les électrons éjectés entre 11,25°et 90° sont associés aux photons émis entre 0° et 11,25°.

Exercice 08 : D'après les lois de la mécanique, l'électron animé d'une vitesse v placé dans un champ magnétique B homogène et perpendiculaire à la vitesse de l'électron, décrit une trajectoire circulaire de rayon R. La relation entre le rayon R et la vitesse v est donnée par le principe fondamental de la dynamique soit :

$$|e|vB = \frac{m_0 v^2}{R} \qquad v = \frac{|e|RB}{m_0} = \frac{1{,}6.10^{-19}.1{,}5.10^{-2}.0{,}02}{0{,}911.10^{-30}}$$

$$v = 5{,}269.10^{7}\ m/s$$

En appliquant les lois de la relativité, l'énergie cinétique de l'électron est égale à :

$$E_c = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right]$$

$$E_c = 0{,}01578\ m_0c^2 = 8{,}06\ keV$$

Exprimons l'énergie cinétique E_c en fonction de l'énergie incidente E_0 et du facteur $\alpha = \frac{E_0}{m_0c^2}$. On trouve (voir cours) :

$$E_c = E_0\frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)} = E_0\frac{0{,}5.\alpha}{1+0{,}5.\alpha} = \alpha.m_0c^2\frac{0{,}5.\alpha}{1+0{,}5.\alpha}$$

$$E_c = \frac{511\ \alpha^2}{2+\alpha} \qquad 511\ \alpha^2 - \alpha\ E_c - 2E_c = 0$$

La résolution de l'équation du second degré en α donne :

$$\alpha = 0{,}1856 \qquad E_0 = 94{,}88\ \ keV$$

$$\lambda_0 = \frac{12{,}4125}{E_0} = 0{,}1308\ Å$$

L'énergie du photon de diffusion et sa longueur d'onde sont égales à :

$$E = \frac{E_0}{1+\alpha(1-\cos\theta)} = \frac{94{,}88}{1+0{,}5.\alpha} = 86{,}82\ eV$$

$$\lambda = \frac{12{,}4125}{E} = 0{,}1429\ \ Å$$

On peut calculer la longueur d'onde du photon de diffusion en utilisant le décalage Compton soit :

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta) = \lambda_0 + 0{,}5\lambda_c = 0{,}1429 \text{ Å}$$

$$\tan\varphi = \frac{1}{(1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{(1+0{,}1308)\tan 30°} = 1{,}5317 \qquad \varphi = 56{,}86°$$

Exercice 09 : 1°) La longueur d'onde λ_0 des photons incidents est égale à :

$$\lambda_0(\text{Å}) = \frac{12{,}4125}{E_0(\text{keV})} = \frac{12{,}4125}{17{,}5} = 0{,}709 \text{ Å}$$

2°) La loi de Bragg est :

$$2d\sin\alpha = n\lambda \quad n = 1{,}2 \ldots$$

L'angle de diffraction pour le faisceau non diffusé vaut :

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0{,}709}{2.3{,}03} = 0{,}1170 \qquad \alpha = 6°43'$$

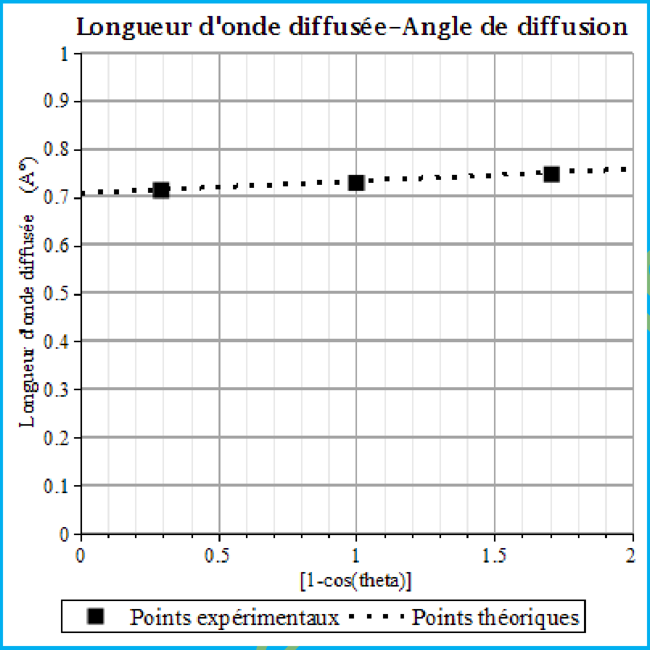
3°) Le tableau ci-dessous donne les valeurs des angles des longueurs d'onde λ en fonction des angles de diffusion θ soit :

θ	45°	90°	135°
α	6°46'	6°55'	7°05'
$\lambda_{\text{Expérience}}$ (Å)	0,714	0,729	0,747
$\lambda_{\text{Théorique}}$ (Å)	0,716	0,733	0,750

Les longueurs d'onde λ théoriques en fonction des angles de diffusion θ sont données par :

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta) \qquad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0{,}02422 \text{ Å}$$

L'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques est de l'ordre de quelques pour mille.



Série du chapitre n°1 Onde et particule

Exercice 01 : L'énergie cinétique de l'électron soumis à une tension V est égale à :

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] = eV \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] = eV \qquad \Rightarrow \qquad \beta^2 = \frac{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2}$$

$$p = mv = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} m_0 c$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{eV}{m_0c^2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 - 1}}{1+\frac{eV}{m_0c^2}}$ on obtient :

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2} + \left(\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2}$$

$$p = m_0c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2} + \left(\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2} = m_0c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2}}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}$$

$$\lambda_{dB}^{rela} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2}}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}} = \frac{h}{\sqrt{2e\,m_0}\,\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

$$\lambda_{dB}^{rela}(m) = \frac{6{,}62.10^{-34}}{\sqrt{2.1{,}6.10^{-19}.0{,}911.10^{-30}}\,\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

$$\lambda_{dB}^{rela}(\text{Å}) = \frac{12{,}26}{\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

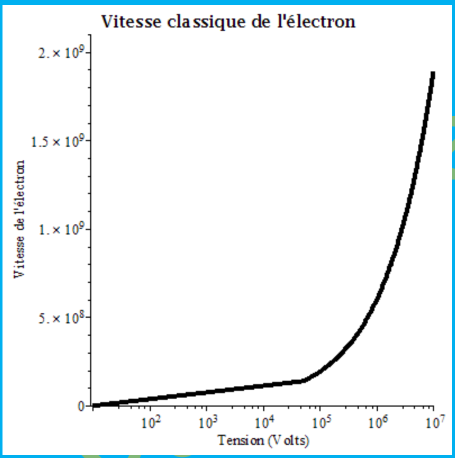
Dans cette formule la longueur d'onde λ_{dB}^{rela} est exprimée en angström et la tension V en volt.

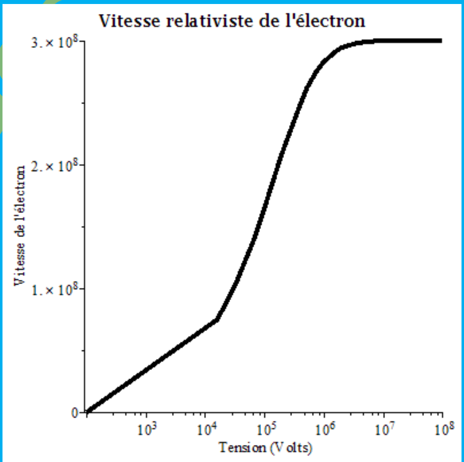
Calculons la longueur d'onde λ_{dB}^{rela} pour une tension V =10^6 volts. On trouve :

$$\lambda_{dB}^{rela}(\text{Å}) = \frac{12{,}26}{\sqrt{10^7}\sqrt{1+\frac{10^7}{2.511.1000}}} = 1{,}18\ \text{mÅ}$$

Le calcul classique aurait donné le résultat suivant :

$$\lambda_{dB}^{classique}(\text{Å}) = \frac{12{,}26}{\sqrt{10^7}} = 3{,}87\ \text{mÅ}$$





Les figures ci-dessus montrent les vitesses classique et relativiste de l'électron en fonction de la tension d'accélération V.

Pour la tension appliquée V = 10^7 volts on obtient :

$$v_{classique} = 1{,}88.10^9\ m/s \quad \text{et} \quad v_{relativiste} = 2{,}99.10^8\ m/s$$

La vitesse classique dépasse la vitesse de la lumière, résultat en contradiction avec le postulat de la relativité restreinte.

$$m_{classique} = 0{,}91.10^{-30}\ \text{kg} \quad \text{et} \quad m_{relativiste} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}86.10^{-29}\ \text{kg}$$

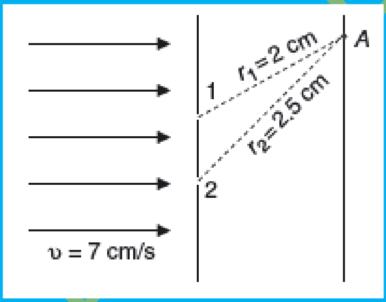
$$p_{classique} = 1{,}7.10^{-21}\ \text{kg.m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad p_{relativiste} = 5{,}59.10^{-21}\ \text{kg.m.s}^{-1}$$

$$\lambda_{dB}^{classique} = 3{,}9\ \text{mÅ} \qquad \lambda_{dB}^{relativiste} = 1{,}18$$

$$\frac{\lambda_{dB}^{classique}}{\lambda_{dB}^{rela}} = \sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}} = \sqrt{1+\frac{10^7}{2.511.1000}} = 3{,}29$$

Exercice 02 : La longueur d'onde de de Broglie est égale à :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v} = \frac{7.10^{-34}}{10^{-30}.0{,}07} = 10^{-2}\ \text{m} = 1\ \text{cm}$$



Pour savoir si au point A, on a une interférence constructive ou destructive on doit calculer la différence de marche entre les faisceaux issus des fentes 1 et 2.

On aura une interférence constructive (signal maximum) si la différence de marche (d_2- d_1) est un multiple de la longueur d'onde de de Broglie soit :

$$d_2 - d_1 = n\,\lambda_{dB}$$

On aura une interférence destructive (signal nul) si la différence de marche (d_2- d_1) est :

$$d_2 - d_1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda_{dB}$$

Au point A la différence de marche (d_2- d_1) est égale à 0,5 cm soit une demi longueur d'onde de de Broglie.

Pour une vitesse des électrons égale à 7 cm/s, le signal est nul au point A. Quand on multiplie par deux la vitesse des électrons, la longueur d'onde de de Broglie est égale à 0,5 cm. Dans ce cas la différence de marche (d_2- d_1) est égale à une longueur d'onde de de Broglie et le signal au point A sera maximum.

Quand on multiplie par quatre la vitesse des électrons, la longueur d'onde de de Broglie est égale à 0,25 cm. Dans ce cas la différence de marche (d_2- d_1) est égale à deux longueurs d'onde de de Broglie et le signal au point A sera également maximum.

Exercice 03 : 1°) La relation entre l'énergie cinétique et la longueur d'onde de de Broglie est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2mE_c} \qquad \lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$$

$$\text{Cas de l'électron :} \quad \lambda_{dB}^{e} = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_c}} \qquad \text{Cas du proton :} \ \lambda_{dB}^{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_pE_c}}$$

$$\frac{\lambda_{dB}^{e}}{\lambda_{dB}^{p}} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{1836} \cong 43$$

2°) Cas de la particule α : $\lambda_{dB}^{\alpha} = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha E_c}}$

$$\frac{\lambda_{dB}^{e}}{\lambda_{dB}^{\alpha}} = \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_e}} = \sqrt{4.1836} \cong 86$$

3°) Deutéron : $\lambda_{dB}^{d} = \frac{h}{\sqrt{2m_d.q.V}}$ Particule α : $\lambda_{dB}^{\alpha} = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha.2q.V}}$

$$\frac{\lambda_{dB}^{d}}{\lambda_{dB}^{\alpha}} = \sqrt{\frac{2.\,m_\alpha}{m_d}} = \sqrt{\frac{2.4.1836}{2.1836}} = 2 \qquad \lambda_{dB}^{d} = 2\,\lambda_{dB}^{\alpha}$$

4°) Energie cinétique : $\begin{cases} E_c(d) = qV \\ E_c(\alpha) = 2qV \end{cases}$ $\quad E_c(d) = \frac{E_c(\alpha)}{2}$

$$\text{Proton : } \lambda_{dB}^{p} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2.m_p.V}} \qquad \text{Particule } \alpha : \lambda_{dB}^{\alpha} = \frac{h}{\sqrt{2.m_\alpha.2.X}}$$

$$\lambda_{dB}^{p} = \lambda_{dB}^{\alpha} \qquad 2\,m_p\,V = 2\,m_\alpha\,2\,X$$

$$X = \frac{m_p}{2\,m_\alpha}V = \frac{m_p}{2.4.m_p}512 = 64\,V$$

5°) La longueur d'onde Compton est égale à :

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0\,c}$$

En tenant compte des effets relativistes, la longueur d'onde de de Broglie est égale à :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

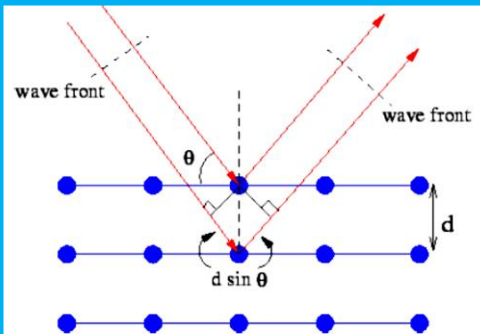
$$\frac{h}{m_0\,c} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

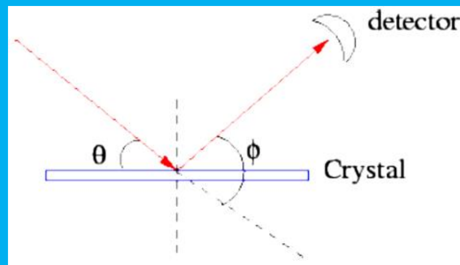
$$2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 \qquad v = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Exercice 04 : La différence de marche δ entre deux faisceaux diffractés adjacents est égale à :

$$\delta = 2\,d\,\sin\theta$$

Dans le calcul on tient compte de la différence de marche des faisceaux incidents puis des faisceaux diffractés.





La longueur d'onde de de Broglie est égale à :

$$\lambda_{dB}(\text{Å}) = \frac{12{,}26}{\sqrt{V}} = \frac{12{,}26}{\sqrt{54}} = 1{,}668\ \text{Å}$$

Les maximums d'intensité seront obtenus quand la condition suivante est satisfaite soit :

$$\delta = 2\ d\ \sin\theta = n\ \lambda_{dB} \qquad n = 1{,}2\ \ldots$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda_{dB}}{2\ d} = \frac{1{,}667}{2.2{,}15} = 0{,}3880 \qquad \theta = 22{,}23° \qquad \varphi = 2\theta = 44{,}46°$$

Exercice 05 : On sait que le pouvoir de résolution d'un microscope optique est de l'ordre de la longueur d'onde du domaine du visible soit en moyenne de l'ordre de 0,5 μm. Dans un microscope optique on ne pourra observer que les détails des objets dont la taille est de l'ordre du micron. En conclusion le microscope optique n'est pas adapté pour l'observation du virus de taille 200 Å.

Pour pouvoir travailler avec un microscope électronique, il faudra que la longueur d'onde associée aux électrons soit 1000 fois plus petite que la taille du virus. Pour obtenir une longueur d'onde 1000 fois plus petite que la taille du virus soit 0,2 Å, il faudra appliquer une tension d'accélération importante.

Dans le cas des électrons classiques, on utilisera la relation suivante :

$$\lambda_{dB} = \frac{12{,}26}{\sqrt{V}} = 0{,}2 \qquad \text{avec } V \text{ en volt et } \lambda_{dB} \text{ en Å}$$

$$V = \left(\frac{12{,}26}{\lambda_{dB}}\right)^2 = \left(\frac{12{,}26}{0{,}2}\right)^2 = 3760\ \mathrm{V}$$

Dans le cas des électrons relativistes, l'énergie cinétique de l'électron soumis à une tension V est égale à :

$$E_c = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] = eV \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] = eV \qquad \Rightarrow \qquad \beta^2 = \frac{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2}$$

$$p = mv = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0c$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{eV}{m_0c^2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 - 1}}{1+\frac{eV}{m_0c^2}}$ on obtient :

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\left(1+\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2} + \left(\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2}$$

$$p = m_0c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2} + \left(\frac{eV}{m_0c^2}\right)^2} = m_0c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2}}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}$$

$$\lambda_{dB}^{rela} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0c\sqrt{\frac{2eV}{m_0c^2}}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}} = \frac{h}{\sqrt{2e\,m_0}\,\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

$$\lambda_{dB}^{rela}(m) = \frac{6{,}62.\,10^{-34}}{\sqrt{2.1{,}6.\,10^{-19}.\,0{,}911.\,10^{-30}}\,\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

$$\lambda_{dB}^{rela}(\text{Å}) = \frac{12{,}26}{\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}}$$

Dans cette formule la longueur d'onde λ_{dB}^{rela} est exprimée en angström et la tension V en volt.

Calculons la tension V pour une longueur d'onde $\lambda_{dB}^{rela} = 0{,}02$ Å. On trouve :

$$\frac{12{,}26}{\sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}} = 0{,}02 \qquad \sqrt{V}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}} = \frac{12{,}26}{0{,}2} = 61{,}3$$

$$V\left(1+\frac{eV}{2m_0c^2}\right) = 3757{,}7 \qquad \frac{e}{2m_0c^2}V^2 + V - 3757{,}7 = 0$$

$$9{,}7573.10^{-7}V^2 + V - 3757{,}7 = 0 \qquad \Delta = 1{,}01466 \qquad \sqrt{\Delta} = 1{,}0073$$

$$V = \frac{0{,}0073}{2.9{,}7573.10^{-7}} = 3749 \quad \text{volt}$$

Aux erreurs dues aux approximations des calculs, les résultats obtenus par la méthode classique et la méthode relativiste sont pratiquement les mêmes.

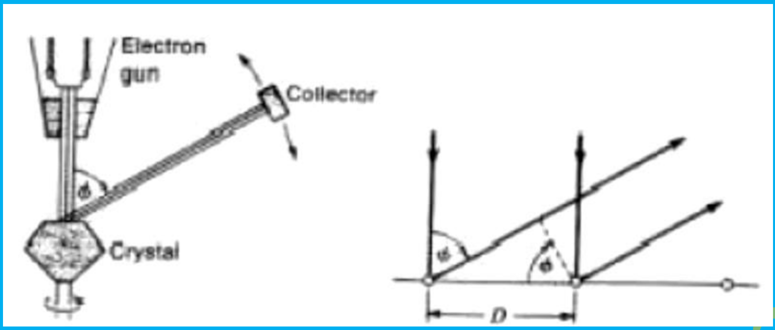
Pour des longueurs d'onde de l'ordre de quelques dixièmes d'angströms, on peut considérer que les effets relativistes sont négligeables.

Exercice 06 : La différence de marche entre les deux rayons diffractés est égale à :

$$d = D\sin\Phi$$

Comme on est en présence d'une interférence constructive, la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde de de Broglie soit :

$$D\sin\Phi = \lambda_{dB}$$



La longueur d'onde de de Broglie s'écrit en fonction de l'énergie cinétique $E_c = eV$ des électrons comme suit :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_c}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} = D\sin\Phi$$

$$V = \left(\frac{h}{D\sin\Phi}\right)^2 \frac{1}{2\,e\,m_0}$$

$$= \left(\frac{6{,}62.10^{-34}}{2{,}15.10^{-10}\sin 50°}\right)^2 \frac{1}{2.1{,}6.10^{-19}.0{,}911.10^{-30}} = 46\ \ V$$

Exercice 07 : L'énergie cinétique acquise par l'électron est égale à :

$$mc^2 - m_0c^2 = eV$$

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right) = eV \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{eV}{m_0c^2}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{eV}{m_0c^2}} \qquad \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1+\frac{eV}{m_0c^2}}\right)^2$$

1°) M.E.B : $\frac{eV}{m_0c^2} = \frac{10}{511} = 0{,}019$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1+0{,}019}\right)^2 \qquad \frac{v}{c} \cong 0{,}20$$

$$p = mv = m_0 \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \frac{0{,}2\ c}{\sqrt{1-(0{,}2)^2}} = 5{,}57.10^{-23}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = 1{,}18.10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}118\ \text{Å}$$

2°) M.E.T : $\frac{eV}{m_0c^2} = \frac{200}{511} = 0{,}39$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1+0{,}39}\right)^2 \qquad \frac{v}{c} \cong 0{,}70$$

$$p = mv = m_0 \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \frac{0{,}7\ c}{\sqrt{1-(0{,}7)^2}} = 2{,}67.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = 2{,}47.10^{-12}\ \mathrm{m} = 0{,}0247\ \text{Å}$$

3°) En mécanique classique on aurait obtenu :

$$\lambda_{dB}(\text{Å}) = \frac{12{,}26}{\sqrt{V}} \qquad \begin{cases} \mathrm{M.E.B:} & \lambda_{dB}(\text{Å}) = 0{,}122\ \text{Å} \\ \mathrm{M.E.T:} & \lambda_{dB}(\text{Å}) = 0{,}0274\ \text{Å} \end{cases}$$

Exercice 08 : 1°) Comme l'interfrange est proportionnel à la longueur d'onde, on observera le même interfrange pour les électrons et les protons.

2°) Comme la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la quantité de mouvement ($\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$), on en déduit que l'interfrange est le même pour les électrons et les protons.

3°) Comme la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la masse, on en déduit que la longueur d'onde associée aux électrons est 1836 fois plus grande que la longueur d'onde associée aux protons. En conséquence, l'interfrange du dispositif à électrons est 1836 fois plus grand que l'interfrange du dispositif à protons.

4°) Comme la longueur d'onde est définie comme $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$, on en déduit la longueur d'onde en fonction de l'énergie cinétique E_c soit $\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\,m\,E_c}}$.

La longueur d'onde est inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse de la particule. En conséquence, l'interfrange du dispositif à électrons est $\sqrt{1836} \cong 43$ fois plus grand que l'interfrange du dispositif à protons.

Exercice 09 : 1°) La longueur d'onde associée au neutron est égale à :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_n v} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{1{,}67.10^{-27}.1} = 3{,}96.10^{-7}\ \text{m} = 0{,}396\ \mu\text{m}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_n v^2 = 0{,}835.10^{-27}\text{J} = 5{,}22.10^{-9}\ \text{eV}$$

2°)

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_n v} \qquad v = \frac{h}{m_n \lambda_{dB}} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{1{,}67.10^{-27}.6.10^{-15}} = 6{,}6.10^{7}\ \text{m/s}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_n v^2 = \frac{1}{2}.1{,}67.10^{-27}.6{,}6^2.10^{14} = 3{,}63.10^{-12}\ \text{J} = 22{,}7\ \text{MeV}$$

3°) En négligeant les effets relativistes, la longueur d'onde associée à un électron soumis à une tension d'accélération V est égale à :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_c}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV}} = 7.10^{-12}\ \text{m} = 0{,}07\ \text{Å}$$

Avec une tension d'accélération V = 30 kV, on trouve une vitesse égale au tiers de la vitesse de la lumière.

Si on prend en compte les effets relativistes on trouve :

$$\lambda_{dB} = \frac{h\,c}{\sqrt{E_c^2 + 2E_0 E_c}} \qquad E_0 = 511\ \text{keV} \quad \text{et} \quad E_c = 30\ \text{keV}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{1{,}6.10^{-19}\sqrt{9.10^{8} + 2.511000.30000}} = 7.10^{-12}\ \text{m} = 0{,}07\ \text{Å}$$

On peut conclure que les effets relativistes n'interviennent pratiquement pas.

4°)

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_c}} \qquad E_c = \left(\frac{h}{\lambda_{dB}}\right)^2 \frac{1}{2m_0}$$

$$E_c = \left(\frac{6{,}62.10^{-34}}{10^{-11}}\right)^2 \frac{1}{2.0{,}911.10^{-30}} = 2{,}40.10^{-15}\ \text{J} = 15\ \text{keV}$$

Exercice 10 : 1°) Le pouvoir de résolution du microscope électronique est de l'ordre de la longueur d'onde associée aux électrons soit :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \qquad E_c = \frac{p^2}{2m_0} \qquad E_c = \frac{1}{2m_0}\left(\frac{h}{\lambda_{dB}}\right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2.0{,}911.10^{-30}}\left(\frac{6{,}62.10^{-34}}{3.10^{-10}}\right)^2 = 2{,}67.10^{-18}\ \text{J} = 16{,}7\ \text{eV}$$

2°) En utilisant la relation de Bragg, on détermine la distance entre les plans atomiques.

$$2d\sin\theta = n\lambda_{dB} \qquad \lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_pE_c}}$$

$$d = n\frac{\lambda_{dB}}{2\sin\theta} = n\frac{h}{\sqrt{2m_pE_c}}\frac{1}{2\sin\theta}$$

Comme l'observation se fait dans l'ordre n = 5, on obtient :

$$d = 5\frac{6{,}62.10^{-34}}{\sqrt{2.1836.0{,}911.10^{-30}.2.1{,}6.10^{-19}}}\frac{1}{2.0{,}5} = 10^{-10}\ \text{m} = 1\ \text{Å}$$

3°) Le pouvoir de résolution du microscope électronique est de l'ordre de la longueur d'onde associée aux électrons soit :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \qquad E_c = \frac{p^2}{2m_0} \qquad p = \sqrt{2m_0 E_c}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{\sqrt{2.0{,}911.10^{-30}.175.1{,}6.10^{-19}}} = 0{,}92.10^{-10}\ \mathrm{m} = 0{,}92\ \text{Å}$$

Exercice 11 : 1°) Pour être diffractés par le bloc poly cristallin dont les plans cristallins sont séparés de d, les neutrons doivent satisfaire la relation de Bragg soit :

$$2d\sin\theta = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{n\lambda}{2d} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq \frac{2d}{n}$$

Pour n = 1 on doit avoir $\lambda \leq 2d_0$ où d_0 est la distance maximale entre deux plans cristallins. Ainsi seuls les neutrons dont la longueur d'onde λ est supérieure à λ_0. Le bloc cristallin se comporte comme un filtre à neutrons qui arrêtera les neutrons de longueur d'onde λ inférieure à λ_0.

2°) L'énergie maximale E_0 des neutrons est égale à :

$$E_0 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 = \frac{6{,}62^2.10^{-68}}{2.1{,}67.10^{-27}}\frac{1}{\lambda_0^2} = 1{,}31.\frac{10^{-40}}{\lambda_0^2}$$

$$E_0(\mathrm{J}) = 1{,}6.10^{-19}.E_0(\mathrm{eV}) \qquad \lambda_0(\mathrm{m}) = 10^{-10}.\lambda_0(\text{Å})$$

$$1{,}6.10^{-19}.E_0(\mathrm{eV}) = 1{,}31.10^{-40}\frac{1}{10^{-20}\lambda_0^2(\text{Å})}$$

$$E_0(\mathrm{eV}) = \frac{1{,}31.10^{-20}}{1{,}6.10^{-19}}\frac{1}{\lambda_0^2(\text{Å})} = \frac{0{,}08187}{\lambda_0^2(\text{Å})}$$

Matériau	Béryllium	Oxyde de Be	Plomb	Graphite	Bismuth
d_0 (Å)	2	2,2	2,9	3,4	4
λ_0 (Å)	4	4,4	5,8	6,8	8

E_0 (meV)	5,11	4,23	2,43	1,77	1,28

Exercice 12 : 1°) On rappelle l'expression de la longueur d'onde de Broglie de masse m et possédant une énergie cinétique E_c soit :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2\ m\ E_c}}$$

L'énergie totale E de la particule m est donnée par l'expression relativiste soit :

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

où E_0 est l'énergie de la particule au repos.
L'énergie totale E de la particule m peut s'écrire comme suit soit :

$$E = E_0 + E_c$$

Portons l'expression de E dans la formule relativiste. On obtient :

$$(E_0 + E_c)^2 = p^2c^2 + E_0^2 \qquad p^2c^2 = E_c^2 + 2E_0.E_c$$

$$p = \frac{\sqrt{E_c^2 + 2E_0.E_c}}{c} \qquad \lambda_{dB} = \frac{h\ c}{\sqrt{E_c^2 + 2E_0E_c}} \qquad \text{où} \qquad E_0 = m_0c^2$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h\ c}{\sqrt{2E_0E_c}\sqrt{1 + \frac{E_c}{2E_0}}} = \frac{h\ c}{\sqrt{2m_0c^2.eV_a}\sqrt{1 + \frac{eV_a}{2m_0c^2}}}$$

Pour des énergies cinétiques E_c inférieures à l'énergie de la masse au repos E_0, l'expression ci-dessus devient :

$$\lambda_{dB} \cong \frac{h\ c}{\sqrt{2em_0c^2}} \frac{\left(1 - \frac{eV_a}{4m_0c^2}\right)}{\sqrt{V_a}}$$

$$\lambda_{dB}(\text{Å}) \cong \frac{12{,}33}{\sqrt{V_a}}\left(1 - \frac{eV_a}{4m_0c^2}\right) = \frac{12{,}33}{\sqrt{V_a}}(1 - 0{,}493.10^{-6}\ V_a)$$

Dans le cas où l'énergie cinétique E_c supérieure à l'énergie de la masse au repos E_0, on obtient :

$$\lambda_{dB} = \frac{h\,c}{\sqrt{2m_0c^2.eV_a}\sqrt{1+\frac{eV_a}{2m_0c^2}}} \cong \frac{h\,c}{eV_a} \qquad \lambda_{dB}(\text{Å}) \cong \frac{12412{,}5}{V_a(V)}$$

2°)

$$\lambda_{dB}(m) = \frac{h\,c}{\sqrt{2E_0E_c}\sqrt{1+\frac{E_c}{2E_0}}} = \frac{h\,c}{\sqrt{2m_0c^2}}\frac{1}{\sqrt{E_c(J)}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{E_c}{2m_0c^2}}}$$

$$10^{-10}.\lambda_{dB}(\text{Å}) = \frac{h\,c}{\sqrt{2m_0c^2}}\frac{1}{\sqrt{1{,}6.10^{-19}.E_c(eV)}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1{,}6.10^{-19}.E_c(eV)}{2m_0c^2}}}$$

$$\lambda_{dB}(\text{Å}) = \frac{10^{10}\,h\,c}{\sqrt{2m_0c^2.1{,}6.10^{-19}}}\frac{1}{\sqrt{E_c(eV)}}\frac{1}{\sqrt{1+0{,}987.10^{-6}E_c(eV)}}$$

$$\lambda_{dB}(\text{Å}) = \frac{12{,}335}{\sqrt{E_c(eV)}}\frac{1}{\sqrt{1+0{,}987.10^{-6}E_c(eV)}}$$

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{2d} \cong \frac{n}{2d(\text{Å})}\frac{12{,}335}{\sqrt{E_c(eV)}}\frac{1}{\sqrt{1+0{,}987.10^{-6}E_c(eV)}}$$

3°)

E_c (eV)	1	10^2	10^3	10^5
λ_{dB} (Å)	12,335	1,233	0,3898	0,0390
θ (°)	//	16,66	5,20	0,52

Seules les longueurs d'onde sont diffractées. Pour E_c = 1 eV il n'y a pas de diffraction et pour $E_c = 10^5$ eV, l'angle de diffraction est pratiquement nul.

Série du chapitre n°2

Exercice 01 : Le joule n'est pas une unité appropriée en physique atomique car elle est très grande. Pour cette raison on utilise l'électron-volt ou le cm^{-1}.

Dans le domaine des faibles énergies (cas des structures fines ou hyperfines des niveaux d'énergie) on préfère utiliser la fréquence comme unité d'énergie. La relation de correspondance entre le cm^{-1} et le Hertz est $1\ cm^{-1} = 30\ GHz$.

La relation qui lie l'énergie au nombre d'onde est donnée par :

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hc\sigma$$

$$E(J) = 1{,}602.10^{-19}\ E(eV) \qquad E(eV) = 6{,}242.10^{18} E(J)$$

$$E(J) = hc\,\sigma(m^{-1}) = 1{,}986.10^{-25}\sigma(m^{-1}) = 1{,}986.10^{-23}\sigma(cm^{-1})$$

$$E(J) = 1{,}986.10^{-23}\sigma(cm^{-1}) \qquad \sigma(cm^{-1}) = 5{,}035.10^{22}\ E(J)$$

$$\sigma(cm^{-1}) = 5{,}035.10^{22}\ E(J) = 5{,}035.10^{22} 1{,}602.10^{-19}\ E(eV)$$

$$\sigma(cm^{-1}) = 8067{,}5.E(eV) \qquad E(eV) = 1{,}239.10^{-4}\ \sigma(cm^{-1})$$

Tableau de conversion des unités			
Unité	Joule	Electron-Volt	cm^{-1}
Joule	1	$6{,}242.10^{18}$	$5{,}035.\ 10^{22}$
Electron-Volt	$1{,}602.10^{-19}$	1	8066,5
cm^{-1}	$1{,}986.\ 10^{-23}$	$1{,}239.\ 10^{-4}$	1

Exercice 02 : 1°)

$$r_n(Z) = 0{,}529\frac{n^2}{Z}\begin{cases} r_2(H) = 4r_1 = 2{,}11\ \text{Å} \\ r_2(He^+) = 2r_1 = 1{,}06\ \text{Å} \\ r_2(Li^{++}) = \frac{4}{3}r_1 = 0{,}705\ \text{Å} \\ r_2(Be^{+++}) = r_1 = 0{,}529\ \text{Å} \end{cases}$$

$$v_n(Z) = 2190\,\frac{Z}{n}\begin{cases} v_2(H) = 1095\ \text{km/s} \\ v_2(He^+) = 2190\ \text{km/s} \\ v_2(Li^{++}) = 3285\ \text{km/s} \\ r_2(Be^{+++}) = 4380\ \text{km/s} \end{cases}$$

2°) T = Temps mis pour faire un tour N = Nombre de tours

$$T_2(Z) = \frac{2\pi\, r_2}{v_2}\begin{cases} T_2(H) = 1{,}21.10^{-15}\ \text{s} & N = 1{,}31.10^6 \\ T_2(He^+) = 3{,}04.10^{-16}\ \text{s} & N = 3{,}28.10^5 \\ T_2(Li^{++}) = 1{,}34.10^{-16}\ \text{s} & N = 1{,}48.10^5 \\ T_2(Be^{+++}) = 2{,}66.10^{-16}\ \text{s} & N = 2{,}25.10^4 \end{cases}$$

Exercice 03 : 1°) $R_\infty = \frac{m\,e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4\,\pi\, c\hbar^3}$ (Voir cours)

2°) Les calculs effectués dans le cas où la masse du noyau M est infinie s'appliquent au mouvement réduit, autour du centre de masse, d'une particule de masse réduite μ

$$\mu = \frac{m\,M}{m+M}$$

où m et M sont respectivement les masses de l'électron et du noyau.

$$R_\infty = \frac{m\,e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4\,\pi\, c\,\hbar^3} = A\,m$$

On remplace la masse m de l'électron par la masse réduite m. On obtient :
$R_M = A\,\mu = A\frac{m\,M}{m+M} = \frac{R_\infty}{m}\frac{m\,M}{m+M} = R_\infty \frac{1}{1+\frac{m}{M}}$ où R_∞ et R_M sont les constantes de Rydberg calculées respectivement en supposant la masse du noyau infinie et en tenant compte de la masse réelle M du noyau.

3°) Atome d'hydrogène : $R_H = 109\,737{,}3\ \frac{1}{1+\frac{1}{1836}} = 109\,677{,}5\ \ cm^{-1}$

Atome de deutérium : $R_D = 109\,737{,}3\ \frac{1}{1+\frac{1}{2.1836}} = 109\,707{,}4\ \ cm^{-1}$

Ion d'hélium 4 He^+ : $R_{He} = 109\,737{,}3\ \frac{1}{1+\frac{1}{4\,.1836}} = 109\,722{,}3\ \ cm^{-1}$

Exercice 04 : Sur quel niveau se trouve l'électron après absorption du photon de longueur d'onde $\lambda_1 = 972{,}8$ Å ?

$$\sigma_{1\to n} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sigma_{1\to n}}{R_H} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{\sigma_{1\to n}}{R_H}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\sigma_{1\to n}}{R_H}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_1 R_H}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{972{,}8.10^{-8}.109677{,}5}}} = 4$$

Après émission du photon de longueur d'onde $\lambda_2 = 18790$ Å, l'électron se trouve sur l'état p soit :

$$\sigma_{4\to p} = R_H\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{\sigma_{4\to p}}{R_H} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{\sigma_{4\to p}}{R_H}$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4^2} + \frac{\sigma_{4\to p}}{R_H}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{\lambda_{4\to p}\,R_H}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{18790.10^{-8}.109677{,}5}}}$$

$$p = 3$$

Exercice 05 : $E_{1\to n} = 13{,}6\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 10{,}2$

$$\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{10,2}{13,6} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n^2}=1-\frac{10,2}{13,6}$$

$$n=\sqrt{\frac{1}{1-\frac{10,2}{13,6}}}=2$$

$$\sigma_{3\to n}=R_H\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{\sigma_{3\to n}}{R_H}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{\lambda_{3\to n}\,R_H}$$

$$n=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{\lambda_{3\to n}\,R_H}}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{1027.10^{-8}.109677,5}}}=1$$

Exercice 06 : **1°)** Un ion hydrogénoïde est un système monoatomique qui possède un seul électron qui gravite autour d'un noyau.

2°) L'ion Li^{+} n'est pas un hydrogénoïde car il possède deux électrons. Par contre l'ion Be^{+++} est un hydrogénoïde car il possède un seul électron.

3°) L'énergie d'ionisation est l'énergie minimale qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'hydrogénoïde dans son état fondamental. Elle est positive. Elle est donnée par :

$$E_i = 13,6\frac{Z^2}{n^2}$$

L'énergie d'ionisation de l'ion Be^{+++} est égale à : $E_i = 13,6\frac{4^2}{1^2}$

$$E_i = 217,6\ \text{eV}$$

Cette énergie d'ionisation correspond à un photon de longueur d'onde

$$\lambda_i=\frac{h\,c}{E_i} \qquad \text{où } E_i \text{ est en Joule}$$

Après calcul on trouve : $\lambda_i = 57\ \text{Å}$

4°) Soit un photon de longueur d'onde $\lambda = 256{,}4$ Å. En partant de l'état n = 2 de l'ion Be^{+++}, on peut atteindre par absorption l'état p défini comme suit :

$$\sigma_{2\to p} = R_{Be}Z^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{\sigma_{2\to p}}{R_{Be}Z^2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\lambda_{4\to p}\, R_\infty Z^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\lambda_{4\to p}\, R_\infty 4^2} \qquad (R_{Be} \cong R_\infty)$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\lambda_{4\to p}\,.16.\,R_\infty}}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}25 - \frac{1}{256{,}4.\,10^{-8}\,.16.109737{,}3}}}$$

$$p = 6$$

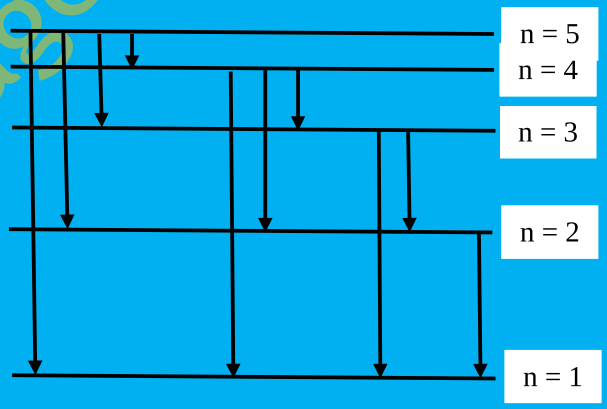
Exercice 07 : Selon la théorie de Bohr, il n'existe pas de règle de sélection. Au total on observera au total dix raies en émission.

Calculons les énergies en eV des cinq états sachant que :

$$E_n(eV) = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

$$E_1 = -13{,}6 \text{ eV} \qquad E_2 = -3{,}4 \text{ eV} \qquad E_3 = -1{,}51 \text{ eV}$$

$$E_4 = -0{,}85 \text{ eV} \qquad E_5 = -0{,}54 \text{ eV}$$



Valeurs des énergies en eV des photons émis :

$$E_5 - E_4 = 0{,}31\ \mathrm{eV} \qquad E_5 - E_3 = 0{,}97\ \mathrm{eV}$$

$$E_5 - E_2 = 2{,}86\ \mathrm{eV} \qquad E_5 - E_1 = 13{,}06\ \mathrm{eV}$$

$$E_4 - E_3 = 0{,}66\ \mathrm{eV} \qquad E_4 - E_2 = 2{,}55\ \mathrm{eV}$$

$$E_4 - E_1 = 12{,}75\ \mathrm{eV}$$

$$E_3 - E_2 = 1{,}89\ \mathrm{eV} \qquad E_3 - E_1 = 12{,}09\ \mathrm{eV}$$

$$E_2 - E_1 = 10{,}2\ \mathrm{eV}$$

Valeurs des longueurs d'onde en Å des photons émis

$$\lambda_{5\to4} = 39995\ \text{Å} \qquad \lambda_{5\to3} = 12782\ \text{Å}$$

$$\lambda_{5\to2} = 4335\ \text{Å} \qquad \lambda_{5\to1} = 949\ \text{Å}$$

$$\lambda_{4\to3} = 18785\ \text{Å} \qquad \lambda_{4\to2} = 4862\ \text{Å} \qquad \lambda_{4\to1} = 972\ \text{Å}$$

$$\lambda_{3\to2} = 6560\ \text{Å} \qquad \lambda_{3\to1} = 1025\ \text{Å} \qquad \lambda_{2\to1} = 1215\ \text{Å}$$

Valeurs des fréquences en GHz des photons émis

$$\nu_{5\to4} = 74927 \qquad \nu_{5\to3} = 234449$$

$$\nu_{5\to2} = 691262 \qquad \nu_{5\to1} = 3156600$$

$$\nu_{4\to3} = 159522 \qquad \nu_{4\to2} = 616335 \qquad \nu_{4\to1} = 3081675$$

$$\nu_{3\to2} = 4568131 \qquad \nu_{3\to1} = 2922153 \qquad \nu_{2\to1} = 2465340$$

Exercice 08 : **1°)** $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{m\,e^2}.\hbar^2 = 0{,}529\ \text{Å}$

2°) Vitesse de l'électron sur l'orbite n = 3

$$v_3 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{n\,\hbar} = (1{,}6.10^{-19})^2.9.10^9.\frac{2\pi}{3.6{,}62.10^{-34}} = 729\ \mathrm{km/s}$$

Energie cinétique : $E_c(\, n = 3) = \frac{1}{2} m v_3^2 = 2{,}39.\,10^{-19}\text{ Joule} = 1{,}49\text{ eV}$

Rayon de l'orbite n = 3 : $r_3 = 3^2\, r_1 = 4{,}761\ \text{Å}$

Energie potentielle :

$$E_p(\,3) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_3} = -(1{,}6.\,10^{-19})^2.\,9.\,10^9\,\frac{10^{10}}{4{,}761} = -\,4{,}84.\,10^{-19}\text{ Joule}$$

$$E_p(n = 3) = -\,3{,}02\text{ eV}$$

Energie de liaison ou énergie de l'électron sur l'orbite n = 3 :

$$E(n = 3) = E_c(n = 3) + E_p(n = 3) = -\,1{,}53\text{ eV}$$

Vérification : On pouvait calculer l'énergie de l'électron sur l'orbite n = 3 en utilisant la formule :

$$E(n = 3) = -\frac{13{,}6}{3^2} = -1{,}51\text{ eV}$$

3°) Energie d'ionisation de l'atome à partir de l'état n = 3 :

$$E_{\text{Ionisation}}(n = 3) = -E(n = 3) = 1{,}53\text{ eV}$$

4°) Energie d'excitation de l'état n = 3 à partir du fondamental.

$$E_{\text{Excitation}}(n = 3) = 13{,}6 - 1{,}53 = 12{,}07\text{ eV}$$

5°) Longueur d'onde du photon capable d'ioniser l'atome à partir de l'état n = 3.

$$E_i = h\,\nu = h\frac{c}{\lambda_i} \quad \Rightarrow \lambda_i = \frac{h\,c}{E_i} = \frac{6{,}62.\,10^{-34}\,.3.\,10^8}{1{,}53.1{,}6.\,10^{-19}} = 8{,}11.\,10^{-7}\text{m}$$

$$\lambda_i = 0{,}81\ \mu\text{m}$$

Exercice 09 : 1°) L'énergie du niveau fondamental est égale à - 24,6 eV.

2°) Quand l'électron retourne à l'état fondamental, l'énergie du photon émis sera égale à :

$$E_{émis} = 24{,}6 - 21{,}4 = 3{,}2 \ \text{eV}$$

La longueur d'onde du photon émis est égale à :

$$\lambda(\text{Å}) = \frac{12412{,}5}{E(eV)} = 3878{,}9 \ \text{Å}$$

Exercice 10 : L'ion hydrogénoïde d'hélium se trouve dans l'état excité n tel que :

$$E_n = -13{,}6.\frac{Z^2}{n^2} = -13{,}6.\frac{2^2}{n^2} = -13{,}6 \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

$$\sigma_{2\to1} = \frac{1}{\lambda_{2\to1}} = R_{He}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R_{He} = 82291 \ \text{cm}^{-1}$$

$$\lambda_{2\to1} = 1215 \ \text{Å}$$

Dans le cas de l'atome d'hydrogène on aura :

$$\sigma_{3\to n} = \frac{1}{\lambda_{3\to n}} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 97370{,}98 \ \text{cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{97370{,}98}{109677{,}5} + \frac{1}{3^2} = 0{,}9989 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

Exercice 11 : **1°)**

$$\lambda = 5790 \ \text{Å} \qquad \sigma = 17271 \ \text{cm}^{-1} \qquad E = 2{,}14 \ \text{eV}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{5790.10^{-10}} = 5{,}18.10^{14} \ \text{Hz}$$

2°) L'absorption d'un photon d'énergie 3 eV à partir de l'état fondamental porterait l'atome de sodium dans l'état d'énergie E = -5,14 + 3 = - 2,14 eV. L'absorption d'un tel photon est impossible car il n'existe pas d'état dont l'énergie est égale à – 2,14 eV.

Peut-il absorber un photon de fréquence $\nu = 8{,}75.10^{14}$ Hz ?

$$E = h\nu = 6{,}62.10^{-34}.8{,}75.10^{14} = 5{,}79.10^{-19} \ \text{J} = 3{,}62 \ \text{eV}$$

L'absorption d'un photon d'énergie 3,62 eV portera l'atome dans l'état d'énergie E_3 = -5,14 + 3,62 = - 1,52 eV. L'atome peut absorber un photon de fréquence $\nu = 8{,}75.10^{14}$ Hz.

Peut-il absorber un photon de longueur d'onde λ = 6795 Å ?

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{6795.10^{-10}} = 2{,}922.10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}82\ \mathrm{eV}$$

L'absorption d'un photon d'énergie 1,82 eV portera l'atome dans l'état d'énergie E = -5,14 + 1,82 = - 3,32 eV. L'atome ne peut pas absorber un photon de longueur d'onde λ = 6795 Å.

Exercice 12

1°) $E_{\text{ionisation}} = R_\infty \frac{Z^2}{1^2} = \frac{10^8}{56{,}95}\ \mathrm{cm}^{-1} = 1\,755\,926{,}25\ \mathrm{cm}^{-1} = 217{,}70\ \mathrm{eV}$

$$E_{\text{ionisation}} = 217{,}70\ \mathrm{eV}$$

2°) $$Z^2 = \frac{E_{\text{ionisation}}}{R_\infty} = 16 \quad \Rightarrow \quad Z = 4$$

3°) $$\sigma_{1\to3} = \sigma_3 = R_\infty Z^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1\,560\,708{,}26\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\lambda_{13} = 64{,}07\ \text{Å}$$

$$\sigma_{1\to4} = \sigma_4 = R_\infty Z^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 1\,646\,059{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\lambda_{14} = 60{,}75\ \text{Å}$$

Exercice 13 : **1°)** Le troisième état excité correspond à l'état n = 4

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0}{m\,e^2}\hbar^2\frac{n^2}{Z} = r_1\frac{n^2}{Z} = 0{,}529\frac{n^2}{Z}$$

$$r_4 = 0{,}529\frac{16}{Z} = 2{,}826 \qquad Z = 3 \qquad \text{Ion } Li^{++}$$

2°) L'énergie d'ionisation de cet ion à partir de cet état excité n = 4 est donnée par son énergie de liaison E_4 soit :

$$E_4 = -13{,}6\left(\frac{Z}{n}\right)^2 = -13{,}6\left(\frac{3}{4}\right)^2 = -7{,}65 \text{ eV}$$

$$E_{ion} = -E_4 = 7{,}65 \text{ eV}$$

3°) La longueur d'onde d'ionisation λ_i est donnée par :

$$E_{ion} = h\nu_i = h\frac{c}{\lambda_i}$$

$$\lambda_i = \frac{hc}{E_{ion}} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^8}{7{,}65.1{,}6.10^{-19}} = 1622{,}55.10^{-10} \text{ m}$$

$$\lambda_i = 1622{,}55 \text{ Å}$$

Exercice 14 : 1°) $\sigma_{1\to4} = \frac{1}{\lambda_{1\to4}} = Z^2 R_{Be}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 4^2 R_{Be}\frac{15}{4^2} = 15\ R_{Be}$

$$\lambda_{1\to4} = \frac{1}{15\ R_{Be}} = 60{,}75.10^{-8} \text{ cm} = 60{,}75 \text{ Å}$$

2°)

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0}{m\,e^2}\hbar^2\frac{n^2}{Z} = r_1\frac{n^2}{Z} = 0{,}529\frac{n^2}{Z} \quad \text{Å}$$

$$r_4 = 0{,}529\frac{4^2}{4} = 2{,}11 \quad \text{Å}$$

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\hbar}\frac{Z}{n} = v_1\frac{Z}{n}$$

$$v_4 = v_1\frac{4}{4} = v_1(H) = 2190 \text{ km/s}$$

3°) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}.0{,}9.10^{-30}.2190000^2 = 2{,}158.10^{-18}$ Joule

$$E_c = 13{,}49 \text{ eV}$$

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4.(1{,}6.10^{-19})^2}{2{,}11.10^{-10}} = -9.10^9\frac{4.(1{,}6.10^{-19})^2}{2{,}11.10^{-10}}$$

$$E_p = -4{,}36.10^{-18} \text{ Joule} = -27{,}29 \text{ eV}$$

$$E_{n=4} = E_c + E_p = 13{,}49 - 27{,}29 = -13{,}8 \text{ eV}$$

On trouve que l'énergie de l'état n = 4 de l'ion de béryllium Be^{+++} est égale à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental n = 1 (Pour trouver $E_{n=4} = -13{,}6$ eV il faut faire des calculs précis).

4°) Comme toutes les transitions sont permises (pas de règle de sélection) on observe 6 raies de transition soit :

$$n = 4 \rightarrow n = 3 \quad n = 4 \rightarrow n = 2 \quad n = 4 \rightarrow n = 1$$

$$n = 3 \rightarrow n = 2 \quad n = 3 \rightarrow n = 1 \quad n = 2 \rightarrow n = 1$$

$$\sigma_{4\to3} = \frac{1}{\lambda_{4\to3}} = 4^2R_{Be}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_{4\to3} = 1171{,}63 \text{ Å}$$

$$\sigma_{4\to2} = \frac{1}{\lambda_{4\to2}} = 4^2R_{Be}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_{4\to2} = 303{,}75 \text{ Å}$$

$$\sigma_{4\to1} = \frac{1}{\lambda_{4\to1}} = 4^2R_{Be}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_{4\to1} = 60{,}75 \text{ Å}$$

$$\sigma_{3\to2} = \frac{1}{\lambda_{3\to2}} = 4^2R_{Be}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow \lambda_{3\to2} = 410{,}07 \text{ Å}$$

$$\sigma_{3\to1} = \frac{1}{\lambda_{3\to1}} = 4^2R_{Be}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow \lambda_{3\to1} = 64{,}07 \text{ Å}$$

$$\sigma_{2\to1} = \frac{1}{\lambda_{2\to1}} = 4^2R_{Be}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) \Rightarrow \lambda_{2\to1} = 75{,}93 \text{ Å}$$

Les calculs ont été faits en supposant que $R_{Be} = R_\infty = 109737{,}3 \text{ cm}^{-1}$

Exercice 15 : L'énergie émise lors de la désexcitation de l'état n vers l'état p = 2 vaut :

$$\Delta E = 10{,}2 + 17 = 27{,}2 \text{ eV}$$

On peut également écrire :

$$\Delta E = 13{,}6.\, Z^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

En combinant les deux relations ci-dessus on obtient :

$$13{,}6.\, Z^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 27{,}2 \qquad (1)$$

L'énergie émise lors de la désexcitation de l'état n vers l'état p = 3 vaut :

$$\Delta E = 4{,}25 + 5{,}95 = 10{,}2 \text{ eV}$$

On peut également écrire :

$$\Delta E = 13{,}6.\, Z^2 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

En combinant les deux relations ci-dessus on obtient :

$$13{,}6.\, Z^2 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 10{,}2 \qquad (2)$$

En faisant la division de la relation (1) par la relation (2) on aura :

$$\frac{27{,}2}{10{,}2} = \frac{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{9}{4}\,\frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 9)} \qquad \Rightarrow \qquad n = 6$$

En utilisant la relation (1) on écrit :

$$Z^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad Z = 3$$

Dans le premier cas, le photon d'énergie 10,2 eV correspond à la transition :

$$10{,}2 = 13{,}6.\, 3^2 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{6^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad p = 3$$

On aura les transitions suivantes : n = 6 → p = 3 → m = 2.

Dans le deuxième cas, le photon d'énergie 4,25 eV correspond à la transition :

$$4{,}25 = 13{,}6.3^2\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{6^2}\right) \quad \Rightarrow \quad p = 4$$

On aura les transitions suivantes : n = 6 → p = 4 → m = 3.

Dans le premier cas on observera les raies suivantes :

$$\lambda_{6\to3} = 1215 \text{ Å} \quad \text{et} \quad \lambda_{3\to2} = 729 \text{ Å}$$

Dans le second cas on observera les raies suivantes :

$$\lambda_{6\to4} = 2916 \text{ Å} \quad \text{et} \quad \lambda_{3\to2} = 2083 \text{ Å}$$

Exercice 16 : **1°)** La série de Lyman est la seule capable d'absorber un rayonnement ultraviolet lointain.

$$\sigma_{1\to n} = R_H\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \lambda_{1\to n} = \frac{1}{\sigma_{1\to n}}$$

$$\sigma_{1\to2} = 82258 \text{ cm}^{-1} \qquad \lambda_{1\to2} = 1215 \text{ Å}$$

$$\sigma_{1\to3} = 97491 \text{ cm}^{-1} \qquad \lambda_{1\to3} = 1025 \text{ Å}$$

$$\sigma_{1\to4} = 102828 \text{ cm}^{-1} \qquad \lambda_{1\to4} = 972{,}5 \text{ Å}$$

$$\sigma_{1\to5} = 105290 \text{ cm}^{-1} \qquad \lambda_{1\to4} = 949{,}7 \text{ Å}$$

La longueur d'onde absorbée est égale à $\lambda_{1\to4} = 972{,}5$ Å.

2°) La raie absorbée correspond à la transition entre le niveau fondamental n = 1 et le niveau excité n = 4.

3°) Comme il n'y a pas de règles de sélection, toutes les transitions sont permises soit :

	n = 4	n = 3	n = 2
n = 3	λ = 18756,3 Å	//	//
n = 2	λ = 4862,7 Å	λ = 6564,7 Å	//
n = 1	λ = 972,5 Å	λ = 1025,7 Å	λ = 1215,7 Å

Le spectre d'émission se compose de six raies : trois raies dans l'ultraviolet, deux raies dans le visible et une raie dans l'infra-rouge.

Exercice 17 $\sigma_{n\to 1} = \frac{1}{\lambda_{n\to 1}} = R_\infty\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

$$\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{\lambda_{n\to 1}R_\infty} \qquad n = \sqrt{\frac{\lambda_{n\to 1}R_\infty}{\lambda_{n\to 1}R_\infty - 1}}$$

λ = 950 Å n = 5

Dans le cas d'un ion hydrogénoide on a :

$$\sigma_{n\to 1} = \frac{1}{\lambda_{n\to 1}} = R_\infty Z^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = \sqrt{\frac{\lambda_{n\to 1}R_\infty Z^2}{\lambda_{n\to 1}R_\infty Z^2 - 1}}$$

λ = 256 Å n = 3

Exercice 18 : I°) Le spectre obtenu est un spectre d'émission (émis par la lampe à vapeur d'hydrogène). Ce spectre est discret (constitué par quatre raies).

II°)1°) Le tableau ci-dessous a été complété par les informations manquantes.

Nom de la raie	Hα	Hβ	Hγ	Hδ
Couleur	Rouge	Bleue	Indigo	Violette
Longueur d'onde λ (Å)	6564	4860	4341	4100
Fréquence ν (Hz)	$4{,}57.10^{14}$	$6{,}17.10^{14}$	$6{,}91.10^{14}$	$7{,}31.10^{14}$

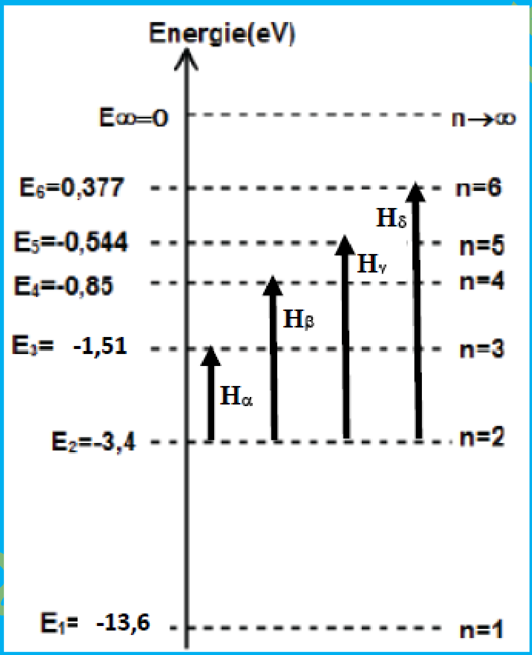
2°) Les quatre raies observées se trouvent dans la partie visible du spectre de la lumière blanche.

III°) 1°) $$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

$$E_1 = -13,6 \text{ eV} \qquad E_3 = -\frac{13,6}{3^2} = -1,51 \text{ eV}$$

$$E_1 = -2,17.10^{-18} \text{ J} \qquad E_3 = -2,41.10^{-19} \text{ J}$$

2°)



Pour déterminer à quelles transitions électroniques correspondent les quatre raies, on utilise la relation ci-dessous qui permet de passer du domaine des longueurs d'onde au domaine des énergies soit :

$$E(\text{eV}) = \frac{12412,5}{\lambda(\text{Å})}$$

Raie H_α :

$$\lambda = 6564\ \text{Å} \quad E = \frac{12412,5}{6564} = 1,89\ \text{eV} \quad E_3 - E_2 = 3,4 - 1,51 = 1,89\ \text{eV}$$

La raie H_α correspond à la transition n = 3 → n = 2.

Raie H_β :

$$\lambda = 4860\ \text{Å} \quad E = \frac{12412,5}{4860} = 2,55\ \text{eV} \quad E_4 - E_2 = 3,4 - 0,85 = 2,55\ \text{eV}$$

La raie H_β correspond à la transition n = 4 → n = 2.

Raie H_γ :

$$\lambda = 4341\ \text{Å} \quad E = \frac{12412,5}{4341} = 2,86\ \text{eV} \quad E_5 - E_2 = 3,4 - 0,54 = 2,86\ \text{eV}$$

La raie H_α correspond à la transition n = 5 → n = 2.

Raie H_δ :

$$\lambda = 4100\ \text{Å} \quad E = \frac{12412,5}{4100} = 3,02\ \text{eV} \quad E_6 - E_2 = 3,4 - 0,38 = 3,02\ \text{eV}$$

La raie H_α correspond à la transition n = 6 → n = 2.

IV°) Pour que l'atome d'hydrogène pris dans l'état fondamental n = 1 puisse passer dans un état excité, il faut que l'énergie qui lui est fournie soit exactement égale à l'écart d'énergie entre l'état excité et l'état fondamental.

Si l'atome doit absorber la quantité d'énergie ΔE = 6 eV, il va se trouver dans l'état d'énergie (-13,6 + 6 = -7,6 eV). Comme l'atome d'hydrogène n'a pas d'état d'énergie égale à E = -7,6 eV, il ne pourra pas absorber la quantité d'énergie ΔE = 6 eV.

Es-ce-que l'atome peut absorber la quantité d'énergie ΔE = 12,75 eV ? Dans ce cas il se trouvera dans l'état d'énergie (-13,6 + 12,75 = - 0,85 eV). L'atome peut absorber la quantité d'énergie ΔE = 12,75 eV car il va se trouver dans l'état n = 4 dont l'énergie est égale à – 0,85 eV.

Es-ce-que l'atome peut absorber la quantité d'énergie ΔE = 18 eV ? Comme cette énergie est supérieure à l'énergie d'ionisation E_i = 13,6 eV, l'atome d'hydrogène sera ionisé et l'électron sera libéré avec une énergie cinétique égale à 4,4 eV. (18 – 13,6 = 4,4 eV)

Exercice 19 : 1°) $R_\infty = \frac{m\,e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4\pi c\hbar^3} = 10973730\ \mathrm{m^{-1}} = 13{,}60\ \mathrm{eV}$

$M = m_e$ et $m = m_e$ $\quad R_M = R_\infty \frac{M}{M+m} \quad R_M = R_\infty \frac{m_e}{m_e+m_e} = R_\infty \frac{1}{2}$

$$R_{Ps} = 54868{,}65\ \mathrm{cm^{-1}} = 6{,}80\ \mathrm{eV}$$

2°)

$$\sigma_{2\to1} = R_{Po}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 41151\ \mathrm{cm^{-1}} \qquad \lambda_{2\to1} = 2430\ \text{Å}$$

$$\sigma_{3\to1} = R_{Po}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 48772\ \mathrm{cm^{-1}} \qquad \lambda_{3\to1} = 2050\ \text{Å}$$

$$\sigma_{4\to1} = R_{Po}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 51439\ \mathrm{cm^{-1}} \qquad \lambda_{2\to1} = 1944\ \text{Å}$$

$$E(H) = -\frac{13{,}6}{n^2} \quad \text{et} \quad E(Po) = \frac{1}{2}E(H) = -\frac{6{,}8}{n^2}$$

$$E_1(Po) = -6{,}8\ \mathrm{eV} \qquad E_2(Po) = -1{,}7\ \mathrm{eV}$$

$$E_3(Po) = -0{,}75\ \mathrm{eV} \qquad E_4(Po) = -0{,}42\ \mathrm{eV}$$

Exercice 20 : 1°)

$$E_n = -R_\infty \frac{Z^2}{n^2} \qquad Z = 4 \qquad R_\infty = 13{,}6\ \mathrm{eV} = 109737{,}3\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$\begin{cases} E_1 = -217{,}6\ \mathrm{eV} = -1755796{,}8\ \mathrm{cm^{-1}} \\ E_2 = -54{,}4\ \mathrm{eV} = -438949{,}2\ \mathrm{cm^{-1}} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 75{,}93\ \text{Å}$$

2°) La constante de Rydberg corrigée de l'effet de masse est égale à :

$$R_{Be} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{1}{9.1836}} = 13{,}599\ \mathrm{eV} = 109730{,}6\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$\begin{cases} E_1 = -217{,}58 \text{ eV} = -1755689{,}6 \ \text{cm}^{-1} \\ E_2 = -54{,}39 \text{ eV} = -438922{,}4 \ \text{cm}^{-1} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 75{,}94 \ \text{Å}$$

L'effet de masse ne lève pas la dégénérescence du niveau n = 2. Il déplace globalement le niveau n = 2 d'une quantité égale à 26,8 cm^{-1}.

3°)

$$E_{n,k} = -R_\infty \frac{Z^2}{n^2}\left[1 + \alpha^2 \frac{Z^2}{n^2}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

Dans l'état n = 1, la trajectoire de l'électron est un cercle de rayon $r_1 = \frac{a_1}{Z}$ soit r_1 = 0,132 Å. L'électron est animé d'un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse $v_1 = v_1(H)Z = 8760 \ \text{km/s}$.

$$E_{1,1} = -R_{Be}\frac{4^2}{1^2}\left[1 + \frac{1}{137^2}\frac{4^2}{1^2}\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{4}\right)\right] = -1756063{,}77 \ \text{cm}^{-1}$$

Dans l'état n = 2 on a deux valeurs de k soit k = 2 et k = 1.

$$E_{2,2} = -R_{Be}\frac{4^2}{2^2}\left[1 + \frac{1}{137^2}\frac{4^2}{2^2}\left(\frac{2}{2} - \frac{3}{4}\right)\right] = -438945{,}78 \ \text{cm}^{-1}$$

Dans l'état n = 2, k = 2, la trajectoire de l'électron est un cercle de rayon $r_2 = \frac{n^2 a_1}{Z}$ soit r_2 = 0,529 Å. L'électron est animé d'un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse $v_2 = v_1(H)\frac{Z}{n} = 4380 \ \text{km/s}$.

Dans l'état n = 2, k = 1, la trajectoire de l'électron est une ellipse dont on déterminera les caractéristiques géométriques.

$$E_{2,1} = -R_{Be}\frac{4^2}{2^2}\left[1 + \frac{1}{137^2}\frac{4^2}{2^2}\left(\frac{2}{1} - \frac{3}{4}\right)\right] = -439039{,}32 \ \text{cm}^{-1}$$

Les caractéristiques de l'ellipse sont :

$$a = n^2\, r_1(Z) \qquad\qquad b = n\,k\,r_1(Z)$$

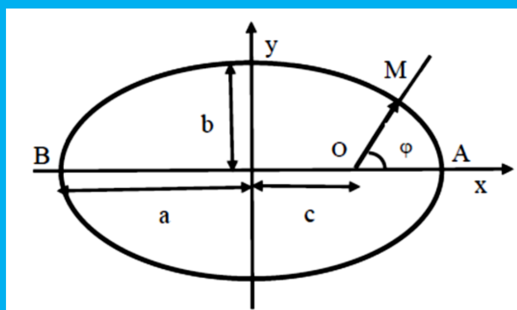
$$r_1(Z) = \frac{r_1(H)}{Z} \qquad\qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$$

$$r_1(Be^{+++}) = \frac{r_1(H)}{4} = 0{,}132 \text{ Å}$$

$$a = 0{,}529 \text{ Å} \qquad b = 0{,}264 \text{ Å} \qquad \varepsilon = 0{,}866$$

Les distances minimale r_{min} et maximale r_{max} sont données par :

$$r_{min} = a(1-\varepsilon) = 0{,}070 \text{ Å} \qquad r_{max} = a(1+\varepsilon) = 0{,}987 \text{ Å}$$



Pour déterminer la vitesse minimale v_{min} et la vitesse maximale v_{max}, on utilisera la relation $L = k\hbar$ soit pour l'état n = 2, k = 1 $\quad L = \hbar$.

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v} = m\,\vec{r} \wedge \left(\overrightarrow{u_r}\, v_r + \overrightarrow{u_\varphi}\, v_\varphi\right) = m\,\vec{r} \wedge \overrightarrow{u_\varphi}\, v_\varphi = m\, r\, v_\varphi \overrightarrow{u_z}$$

$$L = mr\, v_\varphi = \hbar$$

Aux points $r = r_{min} = OA$ et $r = r_{max} = OB$ la vitesse radiale v_r est nulle.

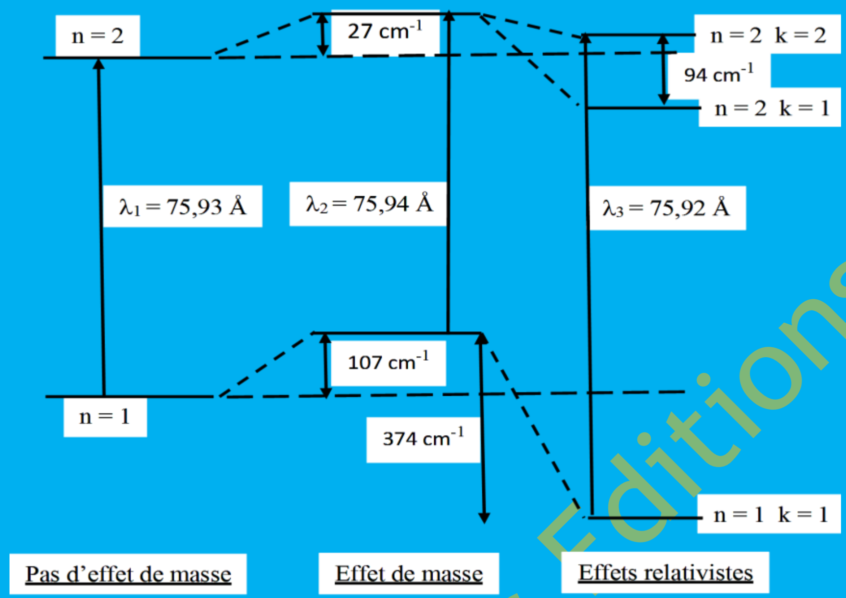
Au point $r = r_{min}$: $\quad m\, r_{min}\left(v_\varphi\right)_{max} = m\, r_{min} v_{max} = \hbar$

$$v_{max} = \frac{\hbar}{m\, r_{min}} = 16522 \text{ km/s}$$

Au point $r = r_{max}$: $\quad m\, r_{max}\left(v_\varphi\right)_{min} = m\, r_{max} v_{min} = \hbar$

$$v_{max} = \frac{\hbar}{m\, r_{max}} = 1171 \text{ km/s}$$

La figure ci-dessous donne un résumé de toutes les perturbations causées par l'effet de masse et les effets relativistes.



En prenant en compte la règle de sélection $\Delta k = \pm 1$, on observera uniquement la transition entre le niveau (n = 1, k = 1) et le niveau (n = 2, k = 2) de longueur d'onde $\lambda_3 = 75{,}92$ Å.

Série du chapitre n°3

Exercice 01 : 1°) Les quatre spectres sont des spectres d'émission car les raies sont brillantes.

2°) Le spectre d'émission de la solution montre qu'elle contient seulement le calcium et le strontium. On ne retrouve pas les raies du sodium et du potassium dans le spectre d'émission de la solution.

Exercice 02 : 1°) Les spectres notés 1 et 2 sont des spectres d'émission car les raies sont brillantes. Le spectre noté 3 est un spectre d'absorption car les raies sont noires.

2°) Dans le spectre de l'étoile on retrouve les raies de l'élément 1. Par contre on ne retrouve pas les raies de l'élément 2. On peut dire que l'étoile contient l'élément 1 et non l'élément 2.

Exercice 03 : 1°) Comme on observe un décalage de la longueur d'onde vers le rouge c'est-à-dire vers les grandes longueurs d'onde, on peut dire que l'astre s'éloigne de la terre. Ainsi l'univers est en expansion.

2°) $\Delta\lambda_D = \lambda_0 \frac{v}{c}$ $\quad v = \Delta\lambda_D \frac{c}{\lambda_0} = 80 \frac{3.10^8}{5890} \cong 4.10^6 \text{ m/s}$

3°) $\lambda_{He}^{Ly} = 303{,}80 \text{ Å}$

$$\delta\lambda_D = 7{,}15.10^{-7}\, \lambda_{He}^{Ly} \sqrt{\frac{T}{M}} \qquad T = M\left(\frac{\delta\lambda_D}{7{,}15.10^{-7}\, \lambda_{He}^{Ly}}\right)^2$$

$$T = 4\left(\frac{0{,}01}{7{,}15.10^{-7}.303{,}80}\right)^2 \cong 8480 \text{ K}$$

$$\delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu_0 \sqrt{\frac{T}{M}} = 7{,}15.10^{-7}.\frac{c}{\lambda_{He}^{Ly}} \sqrt{\frac{T}{M}}$$

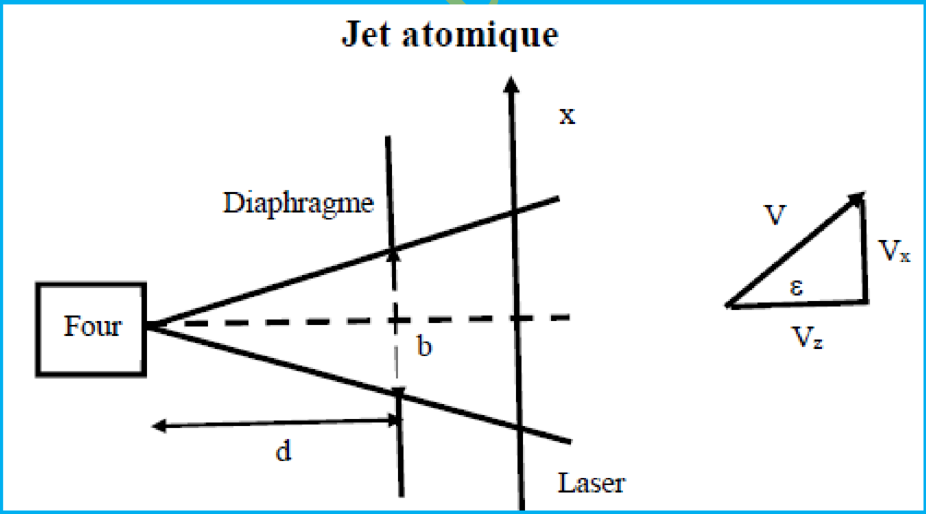
$$\delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}.\frac{3.10^8}{303{,}8.10^{-10}}\sqrt{\frac{8480}{4}} = 340\ \mathrm{GHz}$$

Exercice 04 : 1°) $\delta\lambda_D = 7{,}15.10^{-7}\lambda_0\sqrt{\frac{T}{M}}$ $\delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu_0\sqrt{\frac{T}{M}}$

$$\delta\lambda_D = 7{,}15.10^{-7}.5890.\sqrt{\frac{623}{23}} = 22\ \mathrm{m\AA}$$

$$\delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\frac{3.10^8}{5890.10^{-10}}\sqrt{\frac{623}{23}} = 1{,}895\ \mathrm{GHz}$$

2°) Le rôle du diaphragme est de réduire la divergence du jet atomique de sorte que pratiquement le faisceau laser est perpendiculaire à la vitesse des atomes. Il est clair que plus le diamètre du trou du diaphragme est petit et moins d'atomes seront en interaction avec le faisceau laser.



Pour un observateur situé dans une direction perpendiculaire au jet atomique, seuls les atomes dont la vitesse est comprise entre v_x et $-v_x$ participent à la désexcitation. La raie observée aura une largeur spectrale égale à :

$$\Delta\lambda_R = 2\lambda\frac{v_x}{c} = 2\lambda\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = 3{,}3\ \text{mÅ}$$

$$\Delta\nu_R = 2\,\nu\frac{v_x}{c} = \frac{2}{\lambda}\varepsilon\sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = 278\ \ \text{MHz}$$

La raie émise par les atomes d'un jet atomique est sept fois plus fine que la raie émise par les atomes d'une vapeur.

Exercice 05 : $\sigma_{nP\to 1S} = \frac{1}{\lambda_{nP\to 1S}} = R_H\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ $\quad\lambda_{nP\to 1S} = \frac{1}{R_H}\frac{n^2}{n^2-1}$

$$\tau_{Cla}45070.10^{-11}\lambda^2_{nP\to 1S} \qquad \tau_{Cla} = \frac{3\ m\ \ \varepsilon_0\ c}{2\ \pi\ e^2}\frac{1}{R_H^2}\left[\frac{n^2}{n^2-1}\right]^2$$

$$\Delta\nu_{Cla} = \frac{1}{2\pi\tau_{Cla}} = \frac{e^2}{3\ m\ \ \varepsilon_0\ c}R_H^2\left[\frac{n^2-1}{n^2}\right]^2$$

$$\frac{\Delta\lambda_{Cla}}{\lambda} = \frac{\Delta\nu_{Cla}}{\nu} \qquad \Delta\lambda_{Cla} = \frac{\lambda^2_{nP\to 1S}}{c}\ \Delta\nu_{Cla}$$

$$\Delta\lambda_{Cla} = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{R_H}\frac{n^2}{n^2-1}\right]^2\frac{e^2}{3\ m\ \ \varepsilon_0\ c}R_H^2\left[\frac{n^2-1}{n^2}\right]^2 = \frac{e^2}{3\ m\ \ \varepsilon_0\ c^2}$$

$$\Delta\nu_{Cla} = \frac{1}{2\pi\tau_{Cla}} = \frac{e^2}{3\ m\ \ \varepsilon_0\ c}R_H^2\left[\frac{n^2-1}{n^2}\right]^2 = 424.10^6\left[\frac{n^2-1}{n^2}\right]^2$$

Etats	2P	3P	4P	5P	6P
τ_{Cla} (ns)	0,66	0,60	0,48	0,44	0,42
τ_{Qua} (ns)	1,6	5,4	12,4	24	41
$\Delta\nu_{Cla}$ (MHz)	238	335	372	390	400
$\Delta\nu_{Qua}$ (MHz)	99	29	12,8	6,6	3,9

Exercice 06 : **1°)** $\lambda_{3p\to 2s} = \frac{1}{E(3p)-E(2s)} = 5017\ \text{Å}$

2°) $\Delta\nu_N = \Delta\nu_{3p} + \Delta\nu_{2s} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\tau(3p)} + \frac{1}{\tau(2s)}\right] \cong \frac{1}{2\,\pi\,\tau(3p)} = 113\ \text{MHz}$

$$\Delta\lambda_N = \frac{\lambda^2_{3p\to 2s}}{c}\Delta\nu_N = 0{,}95\ \text{mÅ}$$

La largeur Doppler est égale à : $\Delta\lambda_D = 7{,}15.10^{-7}\lambda_{3p\to 2s}\sqrt{\frac{1000}{4}} = 56\ \text{mÅ}$

$$\delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu_{3p\to 2s}\sqrt{\frac{T}{M}} = 7{,}15.10^{-7}\frac{c}{\lambda_{3p\to 2s}}\sqrt{\frac{1000}{4}} = 6{,}76\ \text{GHz}$$

Exercice 07 : En utilisant la relation p = m v et la relation d'incertitude d'Heisenberg, on complète les valeurs manquantes du tableau soit :

Objet	Masse (kg)	Quantité de mouvement (kg.m/s)	Δx (m)	Δp (kg.m/s)
Baseball	0,15	1,5	$1.\ 10^{-10}$	$5{,}27\ 10^{-25}$
Virus	$2{,}0.10^{-17}$	$2.0.\ 10^{-16}$	$1.\ 10^{-10}$	$5{,}27\ 10^{-25}$
Electron	$9{,}11.\ 10^{-31}$	$9{,}11.\ 10^{-30}$	$1.\ 10^{-10}$	$5{,}27\ 10^{-25}$

Dans le cas de la balle de baseball, l'indétermination sur la quantité de mouvement est négligeable devant la valeur de la quantité de mouvement.

La même remarque pourra être faite pour des objets de la taille d'un virus. Par contre pour le cas de l'électron, l'incertitude sur la quantité de mouvement est beaucoup plus grande que la valeur de la quantité de mouvement. On peut en déduire qu'on ne peut attribuer aucune confiance à la valeur de la vitesse de l'électron.

Exercice 08 : 1°) Le spectre de la galaxie montre des valeurs de longueurs d'onde plus grandes que celles de référence pour les trois raies de l'hydrogène. Ceci correspond à un éloignement de la source lumineuse.

2°)

$$\lambda' = \lambda_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \qquad \frac{v}{c} = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{507-486}{486} = 0{,}0432$$

$$v = 12962962{,}96\ \frac{km}{s} \cong 1{,}29.10^7\ km/s$$

3°)

Nom de la raie	Longueur d'onde de référence λ_0 (nm)	Longueur d'onde mesurée λ' (nm)	Décalage spectral relatif z
H_α	656	683,7	0,0422
H_β	486	507	0,0432
H_γ	434	452,7	0,0430

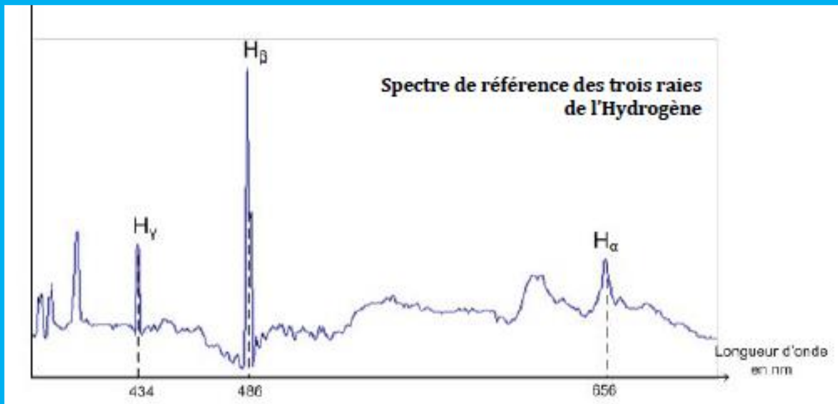
4°) $z = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$

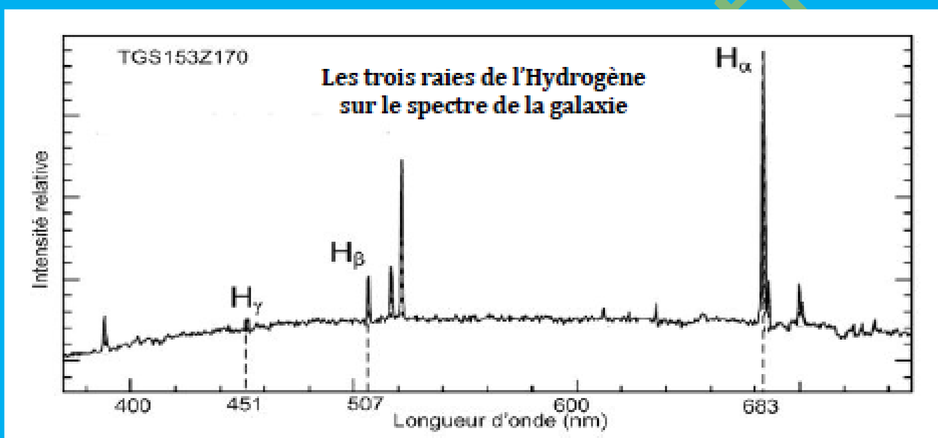
Le décalage relatif z est indépendant des longueurs d'onde λ_0 et λ'.

5°) La meilleure estimation du décalage relatif z s'obtient en faisant la moyenne des trois valeurs soit z = 0,0428.

6°) $z = \frac{v}{c} = 0{,}0428 \qquad v = 1{,}28.10^7\ km/s$

Cette valeur est plus pertinente que la valeur calculée à la question n°2 car elle est calculée à partir de la moyenne de trois mesures de longueurs d'onde.





Exercice 09 : La largeur d'une raie émise par une vapeur atomique portée à une température T est donnée par l'expression ci-dessous :

$$\delta\lambda_D = 7{,}15.10^{-7}\lambda\sqrt{\frac{T}{M}} \qquad T = 23\left(\frac{0{,}04}{7{,}15.10^{-7}.5890}\right)^2 = 2075\ \mathrm{K}$$

Considérons une source lumineuse animée d'une vitesse v par rapport à un observateur fixe. Si la source émet une vibration de longueur d'onde λ_0 , l'observateur mesure une longueur d'onde λ. Le décalage $\Delta\lambda$ en longueur d'onde est égal à :

$$\lambda = \lambda_0\left(1 + \frac{v}{c}\right) \qquad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0\frac{v}{c}$$

$$v = c\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 3.10^8 \frac{15}{5890} = 764000\ \mathrm{m/s}$$

Comme la longueur d'onde mesurée par l'observateur est supérieure à la longueur d'onde émise par l'étoile, on peut dire que l'étoile s'éloigne de l'observateur avec une vitesse égale à 764 km/s.

Exercice 10 : La puissance perdue par rayonnement est égale à:

$$P = \frac{4.\pi.10^{-7}.(1{,}6.10^{-19})^2}{12.\pi.3.10^8}\frac{(2190.10^3)^4}{(0{,}53.10^{-10})^2} = 2{,}33.10^{-8}\ \mathrm{W}$$

L'énergie perdue par l'électron lors d'un tour de rotation est égale à :

$$E = P.T = P.\frac{2\pi r_1}{v_1} = 2{,}33.10^{-8}.\frac{2\pi.0{,}53.10^{-10}}{2190.10^3} = 3{,}74.10^{-24}\ \mathrm{J}$$

où T représente la durée d'un tour.

$$E = 2{,}33.10^{-5}\ \mathrm{eV}$$

Comme l'électron se trouve sur l'orbite de Bohr n = 1, il possède une énergie de 13,6 eV.Le nombre de tours effectués par l'électron avant de s'écraser sur le noyau est égal à :

$$N = \frac{13{,}6}{2{,}2.10^{-5}} = 662\ 185\quad \text{tours}$$

La trajectoire de l'électron est une spirale.

Exercice 11 : La longueur d'onde d'émission du premier niveau excité vers le niveau fondamental est égale à :

$$E_0(\mathrm{eV}) = \frac{12412{,}5}{\lambda_0(\text{Å})} \qquad\qquad \lambda_0 = \frac{12412{,}5}{E_0} = \frac{12412{,}5}{6{,}7} = 1852{,}6\ \text{Å}$$

En utilisant la formule $\tau(\mathrm{ns}) = 45070.10^{-11}\,\lambda_0^2(\text{Å})$, on obtient la durée de vie radiative classique du premier niveau excité de l'atome de mercure soit :

$$\tau = 45070.10^{-11}\,\lambda_0^2 = 1{,}54\ \mathrm{ns}$$

Le résultat obtenu est en très bon accord avec le résultat expérimental.

Exercice 12 : La durée de vie radiative de l'état 4P se calcule à partir de la somme des probabilités de désexcitation radiative du niveau 3P vers les niveaux 1S et 2S soit :

$$A_{3P \to (1S\ \text{et}\ 2S)} = A_{3P \to 1S} + A_{3P \to 2S} = 1{,}88.10^{8}\ s^{-1}$$

$$\tau(3P) = \frac{1}{A_{3P \to 1S} + A_{3P \to 2S}} = 5{,}3.10^{-9}\ s$$

$$\tau(4P) = 5{,}3\ \ ns$$

Exercice 13 :

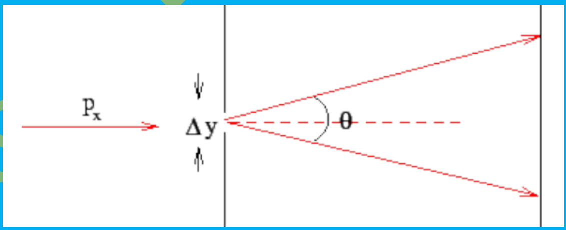
$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta x\ \geq \frac{\hbar}{2\ \Delta p_x} = \frac{\hbar}{2m\ \Delta v_x} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{2\pi.2.0{,}9.10^{-30}.22.10^{4}}$$

$$\Delta x\ \geq 2{,}6.10^{-10}\ m = 2{,}6\ Å$$

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\ \Delta x} \qquad \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m\ \Delta x} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{2\pi.2.0{,}9.10^{-30}.10^{-10}} = 0{,}6.10^{6}$$

$$\Delta v_x \geq 6.10^{5}\ m/s$$

Exercice 14



La quantité de mouvement de l'électron suivant la direction Ox est égale à :

$$p_x = \frac{h}{\lambda_{dB}} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{2.10^{-5}} = 3{,}31.10^{-29}\ kg.m.s^{-1}$$

Appliquons le principe d'incertitude de Heisenberg suivant la direction Oy soit :

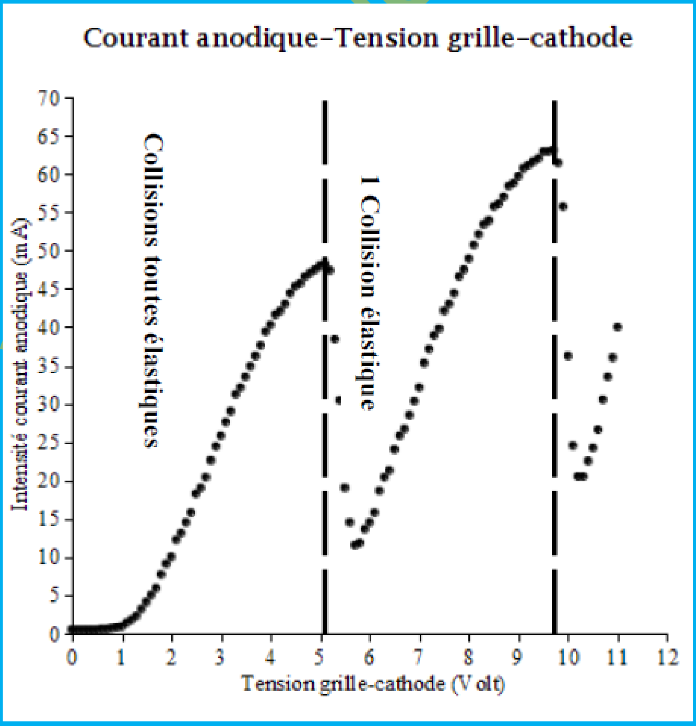
$$\Delta y.\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2.\Delta y} = \frac{\hbar}{2a} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{2.\pi}.\frac{1}{10^{-4}}$$

$$\Delta p_y \geq 10^{-30}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

L'étalement angulaire du faisceau d'électrons est égal à :

$$\tan\theta = \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{10^{-30}}{3{,}31.10^{-29}} \cong 0{,}03 \qquad \theta \cong 1°43'$$

Exercice 15 : 1°) La cathode K chauffé par le filament émet des électrons par émission thermo-ionique (Loi de Richardson : $J_s = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$). Ceux-ci sont accélérés entre la cathode K et la grille G par la tension V_{GC} et acquièrent une énergie eV_{GC}. On applique une contre tension V_A = 1,5 volt entre la grille G et l'anode A. Les électrons d'énergie eV_{GC} supérieure à eV_A peuvent traverser la grille et créent un courant anodique. L'expérience consiste à mesurer le courant anodique en faisant varier la tension grille-cathode V_{GC}.



On remarque une première baisse de l'intensité du courant anodique pour une valeur de la tension grille-anode égale à 4,9 volt puis une seconde baisse de l'intensité du courant anodique pour une valeur de la tension grille-anode égale à 9,8 volt et certainement une troisième baisse de l'intensité du courant anodique pour une valeur de la tension grille-anode égale à 14,7 volt et ainsi de suite.

La première baisse du courant anodique se produit lors d'une collision inélastique entre un électron et l'atome de mercure dans l'état fondamental, la deuxième baisse du courant anodique se produit lors de deux collisions inélastiques successives entre un électron et deux atomes de mercure se trouvant dans leur état fondamental.

Exercice 16 : 1°) La densité de courant vaut :

$$J_S = AT^2 e^{-\frac{W}{k_B T}} = 120.1500^2.e^{-\frac{4{,}5.1{,}6.10^{-19}}{1{,}38.10^{-23}.1500}} = 0{,}2\ \ \mu A/cm^2$$

La surface d'émission du fil de tungstène est égale à :

$$S = L.\pi.D = 1.\pi.0{,}1 = 0{,}314\ cm^2$$

L'intensité du courant d'émission est égale à :

$$I = J_S.S = 0{,}21.10^{-6}.0{,}314 = 0{,}066.10^{-6}\ A = 0{,}066\ \mu A$$

Le nombre d'électrons émis par seconde est égal à :

$$I = n.e \quad \Rightarrow \quad n = \frac{I}{e} = \frac{0{,}0666.10^{-6}}{1{,}6.10^{-19}} \cong 4.10^{11}\ \text{électrons/seconde}$$

2°) Pour $U_{GK} < 4{,}9$ V les chocs électrons-atomes de mercure sont tous élastiques. Il n'y a pas de transfert d'énergie des électrons avec les atomes de mercure. Les électrons conservent leur énergie. Quand U_{GK} augmente de 0 à 4,9 V, le nombre d'électrons qui atteint la plaque par seconde augmente et l'intensité $I_P = \frac{ne}{t}$ augmente. Tous les électrons émis par la cathode sont collectés par l'anode. On peut en déduire que le rapport $\frac{N_P}{N_C} = 1$.

Pour 4,9 < U_{GK} < 9,8 V, les électrons émis par la cathode possèdent une énergie capable de faire passer lors du choc les atomes de mercure de leur état fondamental à leur premier état excité. On parle d'un choc inélastique. Dans ce cas les électrons ayant subi une collision inélastique vont s'arrêter avant la grille et ne pourront pas atteindre la plaque. Comme une partie des électrons émis par la cathode peuvent atteindre la plaque en subissant uniquement des collisions élastiques, on assiste à une baisse du courant plaque. Dans ce cas le rapport $\frac{N_P}{N_C} < 1$.

L'expérience de Franck et Hertz est une confirmation expérimentale de l'hypothèse de quantification des échanges d'énergie entre l'atome et le rayonnement introduite par N.Bohr en 1914 pour expliquer le spectre de raies de l'atome d'hydrogène. Pour cette découverte Franck et Hertz obtinrent le prix Nobel de physique en 1925.

3°) Lors de la collision inélastique, l'atome de mercure passe du niveau fondamental E_1 au niveau excité E_2. Comme la durée de vie du niveau E_2 est très courte, l'atome retourne à l'état fondamental en émettant une raie de longueur d'onde λ égale à :

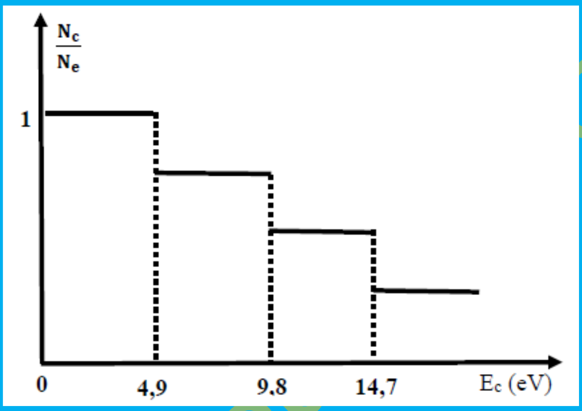
$$\lambda(\text{Å}) = \frac{12412{,}5}{[E_2 - E_1](eV)} = \frac{12412{,}5}{4{,}9} = 2533\ \text{Å}$$

4°) Pour une tension grille – cathode U_{GK} = 9,8 V, l'énergie cinétique des électrons est égale à $E_c = 2(E_2 - E_1)$. Dans ce cas, certains électrons perdent toute leur énergie cinétique suite à deux collisions inélastiques avec deux atomes de mercure dans leur état fondamental. Pour cette raison, on observe une deuxième chute du courant pour E_c = 9,8 eV.

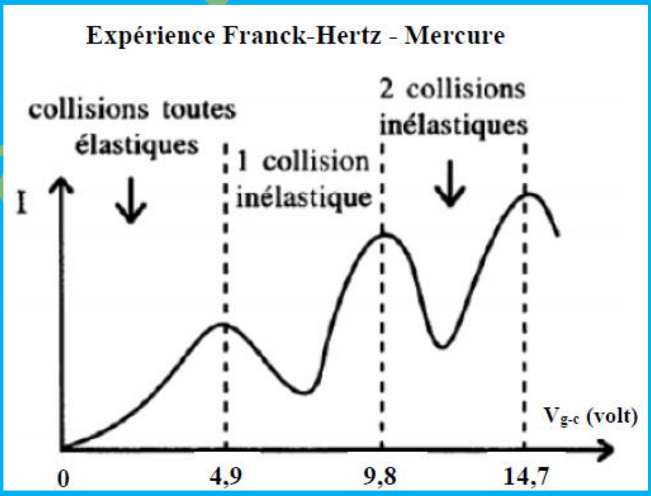
5°) Pour une énergie cinétique des électrons E_c = 14,8 eV et une tension grille-plaque U_{GP} = 0,2V, un électron ne pourra atteindre la plaque que, si après trois collisions inélastiques, il lui reste une énergie cinétique supérieure à U_{GP} = 0,2 V.

Pour une énergie cinétique égale à E_c = 14,8 eV, on a $E_c = 3(E_2 - E_1) + 0{,}1$. Après trois collisions inélastiques avec trois atomes dans leur état fondamental, l'énergie cinétique restante de l'électron sera égale à 0,1 eV. Dans ce cas l'électron ne pourra pas atteindre la plaque car son énergie cinétique restante égale à 0,1 eV est inférieure à la tension grille-plaque U_{GP} = 0,2V. On observe une troisième chute du courant pour E_c = 14,8 eV.

6°) En faisant varier l'énergie cinétique des électrons jusqu'à 15 eV, on observera trois baisses de signal pour les valeurs successives de 4,9 V, 9,8 V et 14,7 V.



Le graphe ci-dessous montre ce qu'on obtiendrait dans le cas où on enregistre le courant anodique I et non pas la charge reçue par la plaque.



Série du chapitre n°4

Exercice 01

1°) La transition 5s → 7s est interdite car la règle $\Delta l = \pm 1$ n'est pas respectée. Dans cet exemple on a $\Delta l = 0$.

2°) L'énergie de liaison de l'état fondamental 5S est égale à :

$$E(5S) = -4,17 \ \text{eV} = -33633,13 \ \text{cm}^{-1}$$

Le défaut quantique de l'état 5S se calcule à partir de l'énergie de liaison :

$$E(5S) = -\frac{R_\infty}{(n-\delta_{5S})^2} \qquad \delta_{5S} = n - \sqrt{-\frac{R_\infty}{E(5S)}} = 3,19$$

En admettant que l'état 7S a le même défaut quantique que l'état 5S, on aura :

$$E(7S) = -\frac{R_\infty}{(n-\delta_{7S})^2} = -7559,69 \ \text{cm}^{-1}$$

Pour passer de l'état 5S à l'état 7S, on aura besoin d'une énergie égale à :

$$E(7S) - E(5S) = 26073,43 \ \text{cm}^{-1}$$

Cette énergie est fournie par l'absorption de deux photons. L'énergie de chaque photon est égale à 13036,71 cm^{-1}. La longueur d'onde du photon délivré par la source lumineuse puissante (laser) est égale à $\lambda = 7670,64$ Å.

Exercice 02

1°) L'énergie de l'état 2s est égale à :

$$E(2S) = -\frac{R_\infty}{[n-\delta(S)]^2} = -\frac{109737,3}{[2-0,412]^2} = -43516,43 \ \text{cm}^{-1}$$

L'énergie de l'état 2p est égale à :

$$E(2P) = -\frac{R_\infty}{[n-\delta(P)]^2} = -\frac{109737,3}{[2-0,041]^2} = -28594,69 \ \text{cm}^{-1}$$

La longueur d'onde de la transition 2S → 2P est égale à :

$$\lambda_{2S\rightarrow 2P} = \frac{1}{E(2S) - E(2P)} = 6701{,}63\ \text{Å}$$

2°) $E(3S) = -\frac{13{,}6}{[n-\delta(3S)]^2} \quad \Rightarrow \quad [n - \delta(3S)] = \sqrt{-\frac{13{,}6}{E(3S)}}$

$$\delta(3S) = 1{,}373$$

$$E(4S) = -\frac{13{,}6}{[n - \delta(4S)]^2} \quad \Rightarrow \quad [n - \delta(4S)] = \sqrt{-\frac{13{,}6}{E(4S)}}$$

$$\delta(4S) = 1{,}338$$

$$E(5S) = -\frac{13{,}6}{[n - \delta(5S)]^2} \quad \Rightarrow \quad [n - \delta(5S)] = \sqrt{-\frac{13{,}6}{E(5S)}}$$

$$\delta(5S) = 1{,}330$$

$$E(6S) = -\frac{13{,}6}{[n - \delta(6S)]^2} \quad \Rightarrow \quad [n - \delta(6S)] = \sqrt{-\frac{13{,}6}{E(6S)}}$$

$$\delta(6S) = 1{,}353$$

L'énergie de liaison de l'état 8S peut être estimée en prenant $\delta(8S) = 1{,}33$ comme défaut quantique de l'état 8S :

$$E(8S) = -\frac{13{,}6}{[n - \delta(6S)]^2} = -\frac{13{,}6}{[8 - 1{,}33]^2} = -0{,}30\ \text{eV}$$

L'énergie de liaison de l'état 8S de l'atome d'hydrogène est égale à $-\frac{13{,}6}{8^2} = -0{,}21$ eV. Cette énergie est très différente de celle de l'état 8S du sodium. La différence tient au fait que dans l'atome d'hydrogène l'électron se déplace dans un potentiel coulombien alors que dans l'atome de sodium se déplace dans un potentiel central crée par le noyau et les dix électrons internes.

Exercice 03 : 1°)

$$E(3S) = -\frac{109737{,}3}{[n-\delta(3S)]^2} = -\frac{109737{,}3}{[3-1{,}37]^2} = -\,41302{,}75\ \text{cm}^{-1}$$

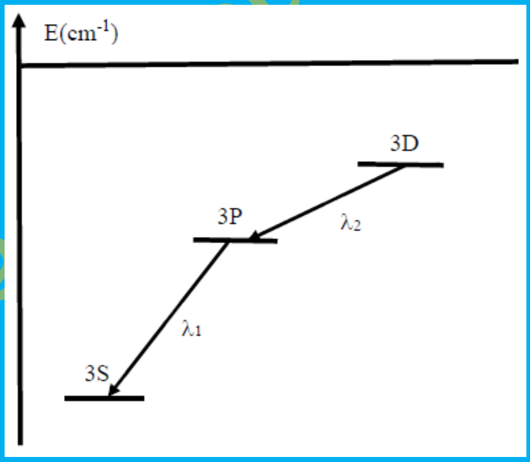
$$E(3P) = -\frac{109737{,}3}{[n-\delta(3P)]^2} = -\frac{109737{,}3}{[3-0{,}88]^2} = -\,24416{,}45\ \text{cm}^{-1}$$

$$E(3D) = -\frac{109737{,}3}{[n-\delta(3D)]^2} = -\frac{109737{,}3}{[3-0{,}01]^2} = -\,12274{,}72\ \text{cm}^{-1}$$

2°) Les raies observées doivent obéir à la règle de sélection $\Delta l = \pm 1$. Les transitions permises sont : $3D \rightarrow 3P$ et $3P \rightarrow 3S$. La transition $3D \rightarrow 3S$ est interdite car $\Delta l = +2$.

$$\lambda_{3D\rightarrow 3P} = \frac{1}{E(3D) - E(3P)} = 8236{,}05\ \text{Å}$$

$$\lambda_{3P\rightarrow 3S} = \frac{1}{E(3P) - E(3S)} = 5921{,}96\ \text{Å}$$



Exercice 04 : L'énergie de liaison d'un ion alcalino-terreux une fois ionisé est donnée par :

$$E_{nl} = -R_\infty \frac{Z_0^2}{n^{*2}} \qquad n^* = n - \delta \qquad Z_0 = 2 \qquad R_\infty = 109737{,}3\ \text{cm}^{-1}$$

$$E(4S) = -R_\infty \frac{2^2}{n^{*2}} = -95752 \qquad n^* = \sqrt{2^2 \frac{109737,3}{95752}} = 2,14 \qquad \delta = 1,86$$

$$E(4P) = -R_\infty \frac{2^2}{n^{*2}} = -70411 \qquad n^* = \sqrt{2^2 \frac{109737,3}{70411}} = 2,49 \qquad \delta = 1,50$$

$$E(4D) = -R_\infty \frac{2^2}{n^{*2}} = -38901 \qquad n^* = \sqrt{2^2 \frac{109737,3}{38901}} = 3,36 \qquad \delta = 0,64$$

$$E(4F) = -R_\infty \frac{2^2}{n^{*2}} = -27695 \qquad n^* = \sqrt{2^2 \frac{109737,3}{27695}} = 3,98 \qquad \delta = 0,02$$

Les défauts quantiques de l'ion alcalino-terreux de calcium Ca^+ sont :

$$\delta(S) = 1,86 \quad \delta(P) = 1,50 \quad \delta(D) = 0,64 \quad \delta(F) = 0,02$$

Exercice 05

$$E(4P) = -\frac{R_H}{n^{*2}} \qquad n^* = \sqrt{\frac{R_H}{E(4P)}} = 2,23 \qquad \delta = n - n^* = 1,76$$

$$E(5P) = -\frac{R_H}{n^{*2}} \qquad n^* = \sqrt{\frac{R_H}{E(5P)}} = 3,26 \qquad \delta = n - n^* = 1,73$$

$$E(6P) = -\frac{R_H}{n^{*2}} \qquad n^* = \sqrt{\frac{R_H}{E(6P)}} = 4,27 \qquad \delta = n - n^* = 1,72$$

Le défaut quantique des états P dépend très peu du nombre quantique principal n.

Exercice 06 : La règle de Klechkowski nous permet de déterminer l'ordre de remplissage des différentes premières sous-couches.

L'orde de remplissange des sous-couches est défini par ordre croissant des valeurs de (n+l). Si plusieurs sous couches ont les mêmes valeurs de (n+l), on remplit par ordre croissant de n.

[3, 2, 1, 1/2] : 3D (n + l = 5) [4, 2, 1, 1/2] : 4D (n + l = 6)

[4, 1, 0, 1/2] : 4P (n + l = 5) [5, 0, 0, 1/2] :5S (n + l = 5)

L'état qui possède la plus grande énergie est l'état [4, 2, 1, 1/2] soit 4D.

Le classement des états par ordre d'énergie croissante est : 3D, 4P, 5S et 4D.

Exercice 07 : L'énergie de première ionisation d'un élément est l'énergie qu'il faut fournir à cet élément en phase gazeuse pour lui arracher un électron et former son ion en phase gazeuse

$$A_{gas} + \text{Energie} \rightarrow A^{+}_{gas} + e^{-} \text{ (Electron avec vitesse nulle)}$$

Pour cela il faut calculer les énergies totales des éléments A_{gas} et A^{+}_{gas} puis faire la différence.

Pour calculer l'énergie de l'état fondamental $(1s)^2$ de l'atome d'hélium on doit trouver la charge effective vue par un électron 1s soit :

$$Z_{eff} = Z - 0{,}3 = 1{,}7$$

Energie de première ionisation :

$$He(1s^2) + \text{ Energie} \rightarrow He^{+}(1s) + e^{-}$$

L'énergie de première ionisation $E.I_1$ est égale à :

$$E.I_1 = \text{Energie totale}[He^{+}(1s)] \text{ - Energie totale } [He(1s^2)] = E_2 - E_1$$

$$E_2 = -13{,}6\left(\frac{2}{1}\right)^2 = -54{,}4 \text{ eV} \qquad E_1 = -2.13{,}6\left(\frac{2-0{,}30}{1}\right)^2 = -78{,}60 \text{ eV}$$

$$EI_1 = 24{,}20 \text{ eV}$$

Cette valeur est très peu différente de la valeur expérimentele 24,58 eV.

Energie de deuxième ionisation :

$$He^{+}(1s) + \text{ Energie } \rightarrow He^{++} + e^{-}$$

L'énergie de deuxième ionisation $E.I_2$ est égale à :

$$E.I_2 = \text{Energie totale } (He^{++}) - \text{Energie totale } (He^{+}) = E'_2 - E_2$$

$$E'_2 = 0 \qquad E_2 = -54{,}4 \text{ eV}$$

$$E.I_2 = 54{,}4 \text{ eV}$$

Exercice 08 : Pour l'atome de vanadium (Z = 23), la configuration électronique à l'état fondamental est :

$$(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6\,(3s)^2\,(3p)^6\,(3d)^3\,(4s)^2$$

Un électron de la couche externe 4s a comme écran :

1 électron s de la couche 4s : $\sigma_s = 0{,}35$

3 électrons (d) de la couche 3d : $\sigma_d = 3*0{,}85$.

8 électrons (s,p) de la couche (3s, 3p) : $\sigma_{s,p} = 8*0{,}85$.

8 électrons (s,p) de la couche (2s, 2p) : $\sigma_{s,p} = 8*1$.

2 électrons s de la couche (1s) : $\sigma_{s,} = 2*1$.

On en déduit la charge effective Z^* soit :

$$Z^* = Z - \sigma = 23 - 0{,}35 - 3*0{,}85 - 8*0{,}85 - 8*1 - 2*1 = 3{,}3$$

$$n^* = 3{,}7$$

L'énergie de liaison d 'un électron de la sous-couche 4s est égale à :

$$E(4s) = -13{,}6\frac{Z^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{3{,}3^2}{3{,}7^2} = -\,10{,}82 \quad \text{eV}$$

Autrement dit, un électron de la couche 4s « voit » non pas la charge des 23 protons du noyau mais uniquement la charge de 3,3 protons en raison de l'écrantage du noyau par les électrons des couches profondes.

Le rayon de l'orbite d'un ion hydrogénoïde est égal à : $a_n = \frac{n^{*2}}{Z^*} a_1(H)$

Le rayon de l'atome de vanadium vaut:

$$a = \frac{3{,}7^2}{3{,}3} a_1(H) = 4{,}15.\, a_1(H) = 2{,}2 \text{ Å}$$

Exercice 09 : 1°) La configuration électronique de l'atome de lithium ($Z = 3$) à l'état fondamental est : $(1s)^2\,(2s)$.

Calculons l'énergie totale de l'atome de lithium dans son état fondamental.

$$E_I = 2E(1s) + E(2s)$$

Calculons les énergies des différents électrons en utilisant le tableau de Slater.

$$E(1s) = -13{,}6 \frac{Z_{1s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6 \frac{(Z - \sigma_{1s})^2}{1^2} = -13{,}6 \frac{(3 - \sigma_{1s})^2}{1^2}$$

Comme $\sigma_{1s} = 0{,}30$ on trouve : $E(1s) = -99{,}14 \text{ eV}$

$$E(2s) = -13{,}6 \frac{Z_{1s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6 \frac{(Z - \sigma_{2s})^2}{2^2} = -13{,}6 \frac{(3 - \sigma_{2s})^2}{2^2}$$

Comme $\sigma 2s = 2*0{,}85$ on trouve : $E(2s) = -5{,}74 \text{ eV}$

$$E_I = -204{,}02 \text{ eV}$$

Calculons cette fois-ci l'énergie totale de l'ion de lithium dans son état fondamental soit :

$$E_{II} = 2E(1s)$$

$$E(1s) = -13{,}6 \frac{(Z - \sigma_{1s})^2}{1^2} = -13{,}6 \frac{(3 - \sigma_{1s})^2}{1^2}$$

Comme $\sigma_{1s} = 0{,}30$ on trouve : $E(1s) = -99{,}14 \text{ eV}$

$$E_{II} = 2E(1s) = -198{,}29 \text{ eV}$$

L'énergie de première ionisation $E.I_1$ est égale à :

$$E.I_1 = E_{II} - E_I = 5{,}73 \text{ eV}$$

L'électron 2s « voit » une charge effective égale à : $Z^* = (Z - \sigma_{2s}) = 1{,}3$.

Le rayon de l'atome est égal à :

$$a = \frac{a_1(H)n^{*2}}{Z^*} = \frac{a_1(H)2^2}{1{,}3} 1{,}62 \text{ Å}$$

2°) Pour l'atome de sodium (Z = 11), la configuration électronique à l'état fondamental est : $(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6\,(3s)$.

Calculons l'énergie totale de l'atome de sodium dans son état fondamental.

$$E_I = 2E(1s) + 2E(2s) + 6E(2p) + E(3s)$$

Calculons les énergies des différents électrons en utilisant le tableau de Slater.

$$E(1s) = -13{,}6\frac{Z_{1s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z - \sigma_{1s})^2}{1^2} = -13{,}6\frac{(11 - \sigma_{1s})^2}{1^2}$$

Comme $\sigma_{1s} = 0{,}30$ on trouve : $E(1s) = -1557{,}06 \text{ eV}$

$$E(2s) = -13{,}6\frac{Z_{2s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z - \sigma_{2s})^2}{2^2} = -13{,}6\frac{(11 - \sigma_{2s})^2}{2^2}$$

Comme $\sigma_{2s} = 7*0{,}35 + 2*0{,}85 = 4{,}15$ on trouve : $E(2s) = -58{,}55 \text{ eV}$

$$E(2p) = -13{,}6\frac{Z_{2p}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{\left(Z - \sigma_{2p}\right)^2}{2^2} = -13{,}6\frac{\left(11 - \sigma_{2p}\right)^2}{2^2}$$

Comme $\sigma_{2p} = \sigma_{2s} = 4{,}15$ on trouve : $E(2p) = -58{,}55 \text{ eV}$

$$E(3s) = -13{,}6\frac{Z_{3s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z - \sigma_{3s})^2}{3^2} = -13{,}6\frac{(11 - \sigma_{3s})^2}{3^2}$$

Comme $\sigma_{3s} = 8*0{,}85 + 2*1$ on trouve : $E(3s) = -7{,}31 \text{ eV}$

L'énergie totale de l'atome de sodium dans son état fondamental vaut :

$$E_I = -2032{,}77 \ \text{eV}$$

Calculons cette fois-ci l'énergie totale de l'ion de sodium dans son état fondamental soit :

$$E_{II} = 2E(1s) + 2E(2s) + 6E(2p)$$

En reprenant les résulutats précédents on trouve :

$$E_{II} = -2025{,}46 \ \text{eV}$$

L'énergie de première ionisation $E.I_1$ est égale à :

$$E.I_1 = E_{II} - E_I = 7{,}31 \ \text{eV}$$

Une autre méthode plus simple permet de calculer l'énergie de première ionisation $E.I_1$ soit :

$$E.I_1 = E_{II} - E_I = [2E(1s) + 2E(2s) + 6E(2p)] - [2E(1s) + 2E(2s) + 6E(2p) + E(3s)]$$

$$E.I_1 = -E(3s)$$

Calculons l'énergie de l'électron 3s soit :

$$E(3s) = -13{,}6\frac{Z_{3s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z - \sigma_{3s})^2}{3^2} = -13{,}6\frac{(11 - \sigma_{3s})^2}{3^2}$$

Comme $\sigma_{3s} = 8.0{,}85 + 2.1 = 8{,}8$ on trouve :

$$E(3s) = -7{,}31 \ \text{eV} \qquad E.I_1 = 7{,}31 \ \text{eV}$$

L'électron 3s « voit » une charge effective égale à : $Z^* = (Z - \sigma_{3s}) = 2{,}2$.

Le rayon de l'atome est égal à :

$$a = \frac{a_1(H)3^2}{2{,}2} = 2{,}16 \ \text{Å}$$

3°) Pour l'atome de potassium ($Z = 19$), la configuration électronique à l'état fondamental est : $(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6\,(3s)^2\,(3p)^6\,(4s)$.

En appliquant la méthode précédente on trouve que l'énergie de première ionisation $E.I_1$ de l'atome de potassium s'obtient à partir de l'énergie de liaison de l'électron 4s soit :

$$E(4s) = -13{,}6\frac{Z^{*2}_{4s}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z-\sigma_{4s})^2}{3{,}7^2} = -13{,}6\frac{(19-\sigma_{4s})^2}{3{,}7^2}$$

$$\sigma_{4s} = 8*0{,}85 + 8*1 + 2*1 = 16{,}8$$

$$E(4s) = -13{,}6\frac{(19-16{,}8)^2}{3{,}7^2} = -4{,}81\ \text{eV}$$

$$E(4s) = -4{,}81\ \text{eV} \qquad E.I_1 = 4{,}81\ \text{eV}$$

L'électron 4s « voit » une charge effective égale à : $Z^* = (Z - \sigma_{4s}) = 2{,}2$.

Le rayon de l'atome est égal à : $a = \frac{a_1(H)3{,}7^2}{2{,}2} = 3{,}29\ \text{Å}$

4°) Pour l'atome de rubidium (Z = 37), la configuration électronique à l'état fondamental est : $(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6\,(3s)^2\,(3p)^6\,(4s)^2\,(3d)^{10}\,(4p)^6\,(5s)$.

$$E(5s) = -13{,}6\frac{Z^{*2}_{5s}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z-\sigma_{5s})^2}{4^2} = -13{,}6\frac{(37-\sigma_{5s})^2}{4^2}$$

$$\sigma_{5s} = 6*0{,}85 + 10*1 + 2*0.85 + 8*1 + 8*1 + 2*1 = 34{,}8$$

$$E(5s) = -13{,}6\frac{(37-34{,}8)^2}{4^2} = -4{,}11\ \text{eV}$$

$$E(5s) = -4{,}11\ \text{eV} \qquad E.I_1 = 4{,}11\ \text{eV}$$

L'électron 5s « voit » une charge effective égale à : $Z^* = (Z - \sigma_{5s}) = 2{,}2$.

Le rayon de l'atome est égal à : $a = \frac{a_1(H)4^2}{2{,}2} = 3{,}84\ \text{Å}$

Dans le cas où le nombre quantique principal n est supérieur à 4 on utilise le tableau ci-dessous :

σ_n = constantes d'écran						
Groupe de l'électron étudié	Contribution des autres électrons					
	Electrons des couches n-2, n-3,	Electrons de la couche n-1	Autres électrons de la couche n			Electrons des couches n+1, n+2,
			s, p	d	F	
s, p	1	0,85	0,35	0	0	0
d	1	1	1	0,35	0	0
f	1	1	1	1	0,35	0

n	1	2	3	4	5	6
n*	1	2	3	3,7	4	4,2

5°) Pour l'atome de césium (Z = 55), la configuration électronique à l'état fondamental est :

$$(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6\,(3s)^2\,(3p)^6\,(4s)^2\,(3d)^{10}\,(4p)^6\,(5s)^2\,(4d)^{10}(5p)^6\,(6s).$$

$$E(6s) = -13{,}6\frac{Z_{6s}^{*2}}{n^{*2}} = -13{,}6\frac{(Z-\sigma_{6s})^2}{4{,}2^2} = -13{,}6\frac{(55-\sigma_{6s})^2}{4{,}2^2}$$

En utilisant le tableau ci-dessus on trouve : σ_{6s} =52,8

$$E(6s) = -13{,}6\frac{(55-52{,}8)^2}{4{,}2^2} = -3{,}73\ \text{eV}$$

$$E(6s) = -3{,}73\ \text{eV} \qquad E.I_1 = 3{,}73\ \text{eV}$$

L'électron 6s « voit » une charge effective égale à : $Z^* = (Z - \sigma_{6s}) = 2,2$.

Le rayon de l'atome est égal à : $a = \frac{a_1(H)4,2^2}{2,2} = 4,24 \text{ Å}$

Elément	Li	Na	K	Rb	Cs
Energie de première ionisation (eV)	5,73	7,31	4,81	4,11	3,73
Valeurs expérimentales (eV)	5,39	5,14	4,34	4,18	3,89
Rayon atomique (Å)	1,62	2,16	3,29	3,84	4,24

Exercice 10 : 1°) Energie de première ionisation $E.I_1$:

La configuration électronique de l'atome de béryllium (Z = 4) à l'état fondamental est : $(1s)^2 (2s)^2$.

Calculons l'énergie totale de l'atome de béryllium dans son état fondamental.

$$E_I = 2E(1s) + 2E(2s)$$

Calculons les énergies des différents électrons en utilisant le tableau de Slater.

$$E(1s) = -13,6\frac{Z_{1s}^{*2}}{n^{*2}} = -13,6\frac{(Z-\sigma_{1s})^2}{1^2} = -13,6\frac{(4-\sigma_{1s})^2}{1^2}$$

Comme $\sigma_{1s} = 0,30$ on trouve : $E(1s) = -186,18 \text{ eV}$

$$E(2s) = -13,6\frac{Z_{2s}^{*2}}{n^{*2}} = -13,6\frac{(Z-\sigma_{2s})^2}{2^2} = -13,6\frac{(4-\sigma_{2s})^2}{2^2}$$

Comme $\sigma_{2s} = 2*0,85 + 0,35 = 2,05$ on trouve : $E(2s) = -12,92 \text{ eV}$

$$E_I = -398,2 \text{ eV}$$

L'énergie totale de l'ion de béryllium Be^+ :

$$E_{II} = 2E(1s) + E(2s) \qquad E(1s) = -186,18 \text{ eV}$$

$$E(2s) = -13,6\frac{Z_{1s}^{*2}}{n^{*2}} = -13,6\frac{(Z-\sigma_{2s})^2}{2^2} = -13,6\frac{(4-\sigma_{2s})^2}{2^2}$$

Comme σ_{2s} = 2*0,85 = 1,7 on trouve : $E(2s) = -17{,}98\ \text{eV}$

$$E_{II} = -390{,}34\ \text{eV}$$

L'énergie de première ionisation $E.I_1$ est égale à :

$$E.I_1 = E_{II} - E_I = 7{,}86\ \text{eV}$$

2°) Energie de deuxième ionisation $E.I_2$:

L'énergie totale de l'ion de béryllium Be^+ :

$$E'_I = E_{II} = -390{,}34\ \text{eV}$$

L'énergie totale de l'ion de béryllium Be^{++} :

$$E'_{II} = 2E(1s) = -372{,}37\ \text{eV}$$

$$E.I_2 = E'_{II} - E'_I = 17{,}97\ \text{eV}$$

3°) Energie de troisième ionisation $E.I_3$:

L'énergie totale de l'ion de béryllium Be^{++} : $E''_I = E'_{II} = -372{,}37\ \text{eV}$

L'énergie totale de l'ion de béryllium Be^{+++} :

$$E''_{II} = -13{,}6\frac{4^2}{1^2} = -217{,}6\ \text{eV}$$

$$E.I_3 = E''_{II} - E''_I = 154{,}77\ \text{eV}$$

3°) Energie de quatrième ionisation $E.I_4$:

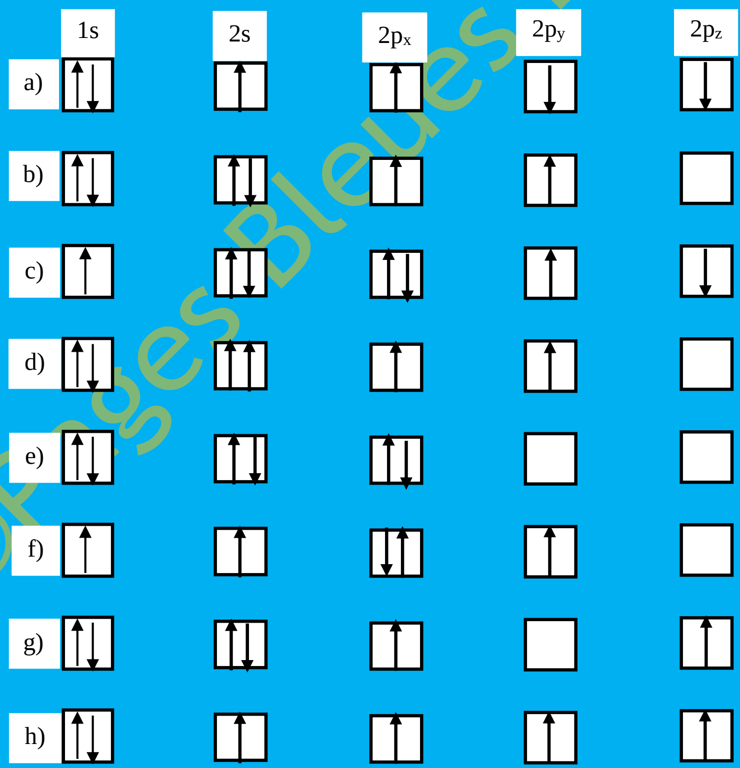
$$E.I_3 = 13{,}6\frac{4^2}{1^2} = 217{,}6\ \text{eV}$$

	$E.I_1$	$E.I_2$	$E.I_3$	$E.I_4$
E.I Expérimentale (eV)	9,28	18,1	155	217
E.I Calculée (eV)	7,86	17,97	154,77	217,6

Exercice 11 : L'ordre de remplissage des électrons de l'atome de carbone Z = 6 respecte la loi de Klechkowski soit $1s^2\,2s^2\,2p^2$.

Les deux configurations **b)** et **g)** sont des configurations fondamentales car les couches 1s et 2s sont totalement remplies et les deux derniers électrons se trouvent dans les couches p_x, p_y et p_z différentes. Les spins des deux derniers électrons occupent des cases différentes et sont orientés dans le même sens en vertu de la règle de Hund qui stipule que la multiplicité de l'état fondamental doit être maximale.

Les configurations **a)** et **h)** sont des configurations excitées car la couche 2s n'est pas pleine. Un électron qui devrait être dans la couche 2s se trouve dans la couche 2p.



La configuration **e)** est une configuration fondamentale mais elle ne respecte pas la règle de Hund. La couche $2p_x$ doit contenir uniquement un seul électron, le deuxième électron doit appartenir à la couche $2p_y$ ou $2p_z$.

La configuration **d)** est une configuration interdite car les deux électrons 2s ont les quatre mêmes nombres quantiques. Cette configuration ne respecte pas le principe d'exclusion de Pauli.

La configuration **c)** représente la configuration de l'ion C^{-1} car elle contient sept électrons.

La configuration **f)** représente la configuration de l'ion C^{+1} car elle contient cinq électrons.

Exercice 12 : On rappelle la formule qui donne les énergies de liaison d'une séquence iso électronique d'un atome alcalin :

$$E_{nl}(eV) = -13{,}6\,\frac{Z_0^2}{n^{*2}}$$

où Z_0 e représente la charge du noyau plus la charge des électrons des couches internes saturées. $Z_0 = 1$ alcalin neutre, $Z_0 = 2$ alcalino-terreux une fois ionisé, etc. Le tableau ci-dessous donne les différentes valeurs de où Z_0 soit :

Elément	Na I	Mg II	Al III	Si IV	P V	S VI	Cl VII
Z_0	1	2	3	4	5	6	7

Les énergies d'ionisation des divers éléments sont données par les énergies de liaison de l'état fondamental de l'état 3S de chacun des éléments.

Elément	Na I	Mg II	Al III	Si IV	P V	S VI	Cl VII
Z_0	1	2	3	4	5	6	7
E(3S)	5,14	15,03	28,40	45,12	65,00	88,05	114,26

Le défaut quantique diminue le long de la séquence iso électronique du sodium, ce qui signifie que le comportement des ions est de plus en plus hydrogénoïde.

Série du chapitre n°5

Exercice 01

1°) Pour la durée Δt = 1ms on obtient :

$$\text{EMP} = 11000 \times (10^{-3})^{0,25} = 1,956 \text{ kJ.m}^{-2}$$

La surface de la tâche du faisceau laser sur la peau est égale à :

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 7,85.10^{-7} \text{ m}^2$$

L'énergie déposée sur la surface éclairée est égale à :

$$W = \text{EMP}.S = 1956.7,85.10^{-7} = 1,535.10^{-3} \text{ Joule}$$

$$W = 1,535 \text{ mJ}$$

Cette énergie correspond à l'énergie maximale permise sur la surface S éclairée.

Quelle est réellement l'énergie W' déposée sur la peau ?

Comme la puissance du laser est égale à P = 5 W, l'énergie W' déposée est égale à :

$$W' = P.\Delta t = 5.10^{-3} \text{ J}$$

$$W' = 5 \text{ mJ}$$

Comme W' > W on en déduit qu'il y a un risque de brûlure.

2°) La puissance du laser est P = 5 W. On doit avoir :

$$W' \leq W$$

La durée d'exposition ($\Delta t'$) est égale à :

$$P = \frac{W'}{\Delta t'} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \frac{W'}{P} = \frac{W}{P} = \frac{1,535.10^{-3}}{5} = 0,307.10^{-3} \text{ s}$$

$$\Delta t' = 0,307 \text{ ms}$$

Exercice 02 : La divergence du faisceau est égale à :

$$\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 1{,}22\frac{6000.10^{-10}}{0{,}01} = 7{,}32.10^{-5} \qquad \theta \cong 7{,}32.10^{-5}\text{radian}$$

Le diamètre de la tâche sur la lune est égal à :

$$\phi_1 = 2.7{,}32.10^{-5}.4.10^{8}\ \text{m} = 58.10^{3}\ \text{m} = 58\ \text{km}$$

Dans le cas où le faisceau laser est émis à travers un télescope, on trouve :

$$\phi_2 = 580\ \text{m}$$

Exercice 03 : 1°) $\Delta E = 16973\ \text{cm}^{-1} \qquad \lambda = 5891{,}7\ \text{Å}$

$$\delta\lambda_D = 7{,}15.10^{-7}\lambda\sqrt{\frac{T}{M}} = 21\ \text{mÅ}$$

$$\delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu\sqrt{\frac{T}{M}} = 1{,}86\ \text{GHz}$$

2°) $\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}.\exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)$

$$kT = 1{,}38.10^{-23}.600\ \text{J} = \frac{1{,}38.10^{-23}}{1{,}6.10^{-19}}.600 = 0{,}05175\ \text{eV} = 414{,}4\ \text{cm}^{-1}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{3}{1}.\exp\left(-\frac{16973}{417{,}39}\right) = 6{,}5.10^{-18}$$

$$\exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) = \frac{N_2}{N_1}.\frac{g_1}{g_2} = 0{,}000003.\frac{1}{3} = 0{,}000001$$

$$\frac{\Delta E}{kT} = \ln(10^6) = 13{,}8 \quad \Rightarrow \quad kT = \frac{16973}{11{,}5} = 1228\ \text{cm}^{-1}$$

$$T = 600.\frac{1228}{417{,}4} = 1766\ \text{K}$$

3°) $A_{21} = \frac{1}{\tau} = 6{,}25.10^{7}\ \text{s}^{-1}$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h}{\lambda^3} = 8{,}1353.10^{-14} \quad \Rightarrow \quad B_{21}$$
$$= 7{,}6825.10^{20} \quad \text{Joule}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$$

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21} = 2{,}3047.10^{21} \quad \text{Joule}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$$

$$u(\nu) = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T}} - 1} \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} = 5{,}09.10^{14} \ \text{Hz}$$

$$u(\nu) = \frac{8\,\pi\,.6{,}62.10^{-34}.10^{30}}{5891{,}7^3} . \frac{1}{\exp\left(\frac{6{,}62.10^{-34}.5{,}09.10^{14}}{1{,}38.10^{-23}.1766}\right) - 1}$$

$$u(\nu) = 8{,}1353.10^{-14}.9{,}8927.10^{-7} = 8{,}048.10^{-20} \quad \text{J.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}$$

Probabilité d'absorption : $B_{12}.u(\nu) = 185{,}48 \quad s^{-1}$

Probabilité d'émission stimulée : $B_{21}.u(\nu) = 61{,}82 \quad s^{-1}$

Probabilité d'émission spontanée : $A_{21} = 6{,}25.10^7 \, s^{-1}$

4°) $N_1 u(\nu) B_{12} = N_2 u(\nu) B_{21} + A_{21} N_2$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{u(\nu)B_{12}}{u(\nu)B_{21} + A_{21}} = \frac{185{,}48}{61{,}82 + 6{,}25.10^7} = 2{,}9676.10^{-6} \cong 3.10^{-6}$$

On retrouve le rapport des populations à l'équilibre de la question précédente.

Exercice 04 : En utilisant la formule de Planck $u(\nu) = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T}}-1}$ et la relation $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3}$ entre les coefficients d'Einstein, le rapport entre les probabilités de désexcitation spontanée et de désexcitation par émission stimulée vaut :

$$\frac{A_{21}}{B_{21} u(\nu)} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3\,u(\nu)} = e^{\frac{h\,\nu}{k\,T}} - 1 = e^{\frac{h\,c}{k\,\lambda\,T}} - 1$$

Evaluons ce rapport dans le cas d'une vapeur atomique portée à la température T = 400 K et pour un rayonnement dans le domaine du visible $\lambda = 6328$ Å.

$$\frac{A_{21}}{B_{21}u(\nu)} = e^{\frac{h\,c}{k\,\lambda\,T}} - 1 = 2.10^{24} \qquad \Rightarrow \qquad A_{21} = 2.10^{24}.B_{21}u(\nu)$$

$$A_{21} = 10^{-7}\,s^{-1} \quad \Rightarrow B_{21}u(\nu) = \frac{10^{-7}}{2.10^{24}} = 5.10^{-32}\,s^{-1}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}u(\nu)} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3\,u(\nu)} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu^3}{c^3}\frac{c^3}{8\,\pi\,h\,\nu^3}e^{\frac{h\,\nu}{k\,T}} - 1 = e^{\frac{h\,\nu}{k\,T}} - 1$$

$$e^{\frac{h\,c}{k\,\lambda\,T}} - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{h\,c}{k\,\lambda\,T}} = 2$$

$$T = \frac{h\,c}{k\,\lambda}\frac{1}{\ln 2} = 32810\text{ K} \qquad \text{Impossible}$$

Exercice 05 : Considérons un système à deux niveaux d'énergie E_1 et E_2. Appelons N_1 et N_2 leurs populations et ν_0 la fréquence de transition entre les deux niveaux d'énergie.

Le nombre d'atomes qui quittent par seconde le niveau E_2 pour le niveau E_1 par émission spontanée est égal à :

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{e.spo} = A_{21}N_2$$

Le nombre d'atomes qui quittent par seconde le niveau E_2 pour le niveau E_1 par émission stimulée est égal à :

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{e.sti} = B_{21}u(\nu_0)N_2$$

Pour que le processus d'émission spontanée l'emporte sur le processus d'émission stimulée, il faut que :

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{e.spo} > \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{e.sti} \qquad\qquad A_{21} > B_{21}u(\nu_0)$$

où $u(\nu_0)$ est la valeur de la densité spectrale d'énergie pour la fréquence $\nu = \nu_0$.

$$u(\nu_0) = \frac{8\,\pi\, h\nu_0^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_BT}} - 1}$$

$$A_{21} > B_{21}\frac{8\,\pi\, h\nu_0^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_BT}} - 1} \qquad \frac{A_{21}}{B_{21}} > \frac{8\,\pi\, h\nu_0^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_BT}} - 1}$$

Comme $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h}{\lambda_0^3} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3}$ on obtient :

$$\frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} > \frac{8\,\pi\, h\nu_0^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_BT}} - 1} \qquad e^{\frac{h\nu_0}{k_BT}} > 2$$

$$\frac{h\nu_0}{k_BT} > \ln 2 = 0{,}69 \qquad h\nu_0 > 0{,}69\, k_BT$$

La condition pour que l'émission spontanée l'emporte sur l'émission stimulée peut s'écrire comme suit :

$$h\nu_0 > k_BT$$

Dans le cas du soleil : T = 6000 K et $\nu_0 = 6.10^{14}$ Hz

$$h\nu_0 = 4.10^{-19}\ \mathrm{J} \qquad k_BT = 8.10^{-20}\ \mathrm{J}$$

Dans le soleil, l'émission spontanée l'emporte sur l'émission stimulée.

A la température ambiante T = 300 K, l'émission spontanée l'emporte sur l'émission stimulée pour les fréquences :

$$\nu > \frac{k_BT}{h} = \frac{1{,}38.10^{-23}.300}{6{,}62.10^{-34}} = 62.10^{11}\ \mathrm{Hz}$$

$$\lambda < \frac{hc}{k_BT} = 4{,}8.10^{-5}\ \mathrm{m} = 48\ \mu\mathrm{m}$$

L'émission spontanée l'emporte sur l'émission stimulée pour les longueurs d'onde inférieures à 48 µm soit dans les domaines infra rouge et visible.

Exercice 06 : 1°) Les schémas A, B et C représentent respectivement une absorption, une émission spontanée et ne émission stimulée.

2°) La longueur d'onde du photon émis est égale à :

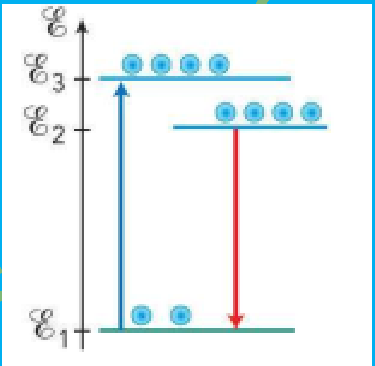
$$\lambda(\mathrm{m}) = \frac{\mathrm{h\ c}}{\mathrm{E(J)}} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{2{,}34.1{,}6.10^{-19}} = 5{,}304.10^{-7}\ \mathrm{m} = 5304\ \text{Å}$$

3°) Le photon émis par émission stimulée a la même énergie, la même direction, le même sens de propagation et il est en phase avec le photon incident

Exercice 07 : 1°) L'état fondamental de plus basse énergie est l'état (1) et les états excités sont les états (2) et (3).

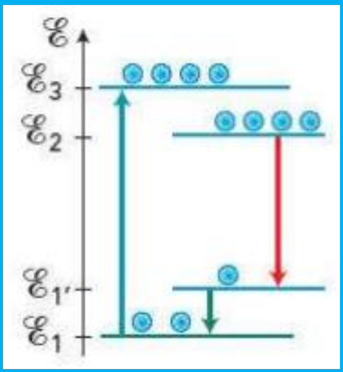
2°) Le pompage optique permet de réaliser la transition (1) → (3) et l'émission stimulée correspond à la transition (2) → (1).

On représente la transition (1) → (3) en bleu et la transition (2) → (1) en rouge.



3°) Dans un tel laser, l'émission stimulée qui correspond à la transition (2) → (1) détruit l'inversion de population entre les niveaux (2) et (1), ce qui pour conséquence la disparition de l'effet laser. Un tel laser ne peut fonctionner qu'en mode pulsé.

4°) Le niveau (1') se trouve entre les niveaux (1) et (2). Il est peu peuplé car il se vide rapidement au profit du niveau fondamental (1).

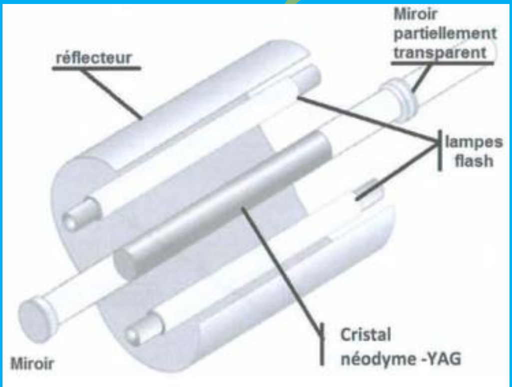


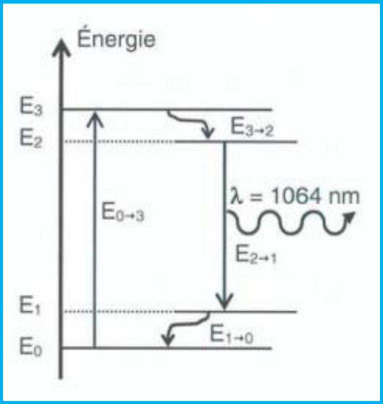
Le pompage optique permet de réaliser la transition (1) → (3) et l'émission stimulée correspond à la transition (2) → (1').

On représente la transition (1) → (3) en bleu et la transition (2) → (1') en rouge. Dans cette configuration on maintient l'inversion de population entre les niveaux (2) et (1) autrement que par le pompage optique. La transition (1') → (1) est représenté en vert.

5°) L'excitation permettant le pompage optique (1) → (3) peut se faire de manière intermittente (par flash lumineux), ce qui laisse du temps au milieu amplificateur le temps de se refroidir.

Exercice 08





1°) Les deux propriétés caractéristiques du rayonnement émis par le laser sont :

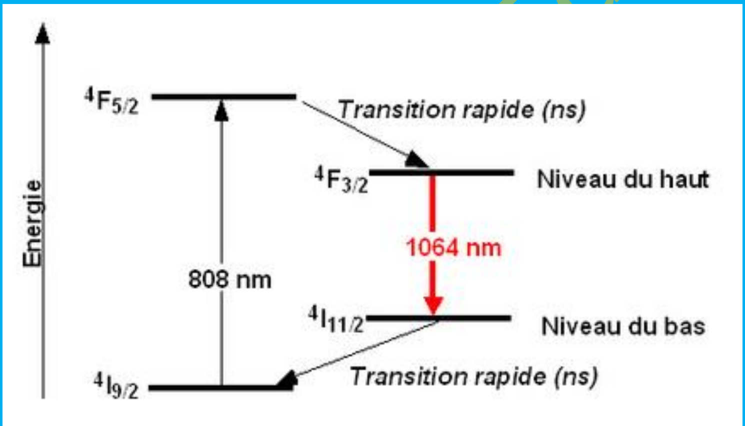
La mono chromaticité du rayonnement et le fait que le faisceau émis est quasiment cylindrique c'est-à-dire que la divergence du rayonnement laser est très peu divergent. Cette dernière propriété est indispensable dans le cas de la mesure des grandes distances (télémétrie).

2°) Les lampes flash servent au pompage optique qui porte les ions chrome de l'état fondamentale E_0 vers l'état excité E_3.

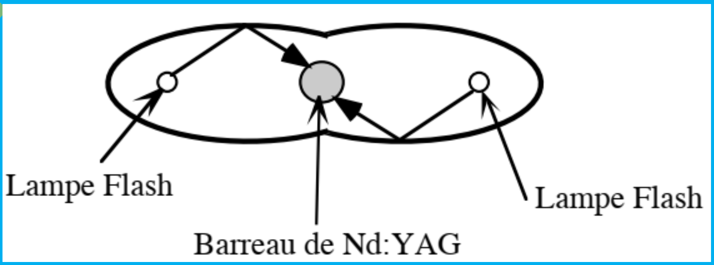
3°) La longueur d'onde de la lumière émise par une lampe flash est égale à :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{2{,}458.10^{-19}}$$

$$\lambda = 8{,}08.10^{-7}\ \mathrm{m} = 808\ \mathrm{nm}$$



La figure ci-dessus montre le cycle de pompage du laser Nd-YAG.
Les lampes flash et le barreau laser sont placés aux foyers de deux réflecteurs elliptiques (voir figure ci-dessous).



Le pompage s'effectue par deux lampes flash au xénon placées de part et d'autre du barreau. L'ensemble est placé dans une cavité doublement elliptique (chaque lampe se trouve au foyer d'une des ellipses, le barreau de Nd-YAG est au foyer commun aux deux ellipses). L'ensemble est refroidi par une circulation d'eau.

Exercice 09

$$2d = c\,\Delta t \qquad d = \frac{c\Delta t}{2} = \frac{299792458.2{,}4292278641}{2} = 364132096{,}210\ \mathrm{m}$$

La distance la lumière parcourue en 3.10^{-10} s est égale à :

$$d' = c\,\Delta t' = 299792458.3.\,10^{-10} = 0{,}09\ \mathrm{m}$$

L'incertitude absolue sur cette mesure est :

$$\Delta d' = 0{,}09\ \mathrm{m} \qquad d = 364132096{,}210\ \pm 0{,}09\mathrm{m}$$

L'incertitude relative est égale à :

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}09}{364132096{,}210} = 2{,}5.\,10^{-10}$$

Exercice 10 : 1°) Le temps mis par l'impulsion entre l'émission et la réception est égal à :

$$c\Delta t = 2D \qquad \Delta t = t_{\text{Réception}} - t_{\text{Emission}}$$

$$\Delta t = \frac{2D}{c} = \frac{800000}{300000} = 2{,}666\ \mathrm{s}$$

Le facteur 2 prend en compte le fait que la lumière fait un aller-retour.

2°) Le nombre de photons contenus dans une impulsion est égal à :

$$E = Nh\nu = N\frac{hc}{\lambda} \qquad N = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{0{,}3.5320.10^{-10}}{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}$$

$$N = 8.10^{17}\ \text{photons/impulsion}$$

3°) Le rayon R_L de la tache laser sur la lune vaut :

$$R_L = D\tan\frac{\alpha}{2} = 400000.9{,}7.10^{-6} = 3{,}878\ \text{km}$$

La surface de la tache laser sur la Lune est égale à :

$$A_L = \pi R_L^2 = 47\ \text{km}^2 = 47.10^6\ \text{m}^2$$

4°) L'énergie réfléchie est donnée par :

$$\frac{\text{Energie réfléchie}}{\text{Energie incidente}} = \frac{N_r}{N_i} = \frac{\text{Surface du réflecteur}}{\text{Surface de la tache laser}} = \frac{A_R}{A_L}$$

N_r est le nombre de photons réfléchis par le réflecteur

N_i le nombre de photons émis par le laser.

Le rendement à la réflexion est égal à :

$$\rho_1 = \frac{\text{Energie réfléchie par le panneau de cataphotes}}{\text{Energie émise par le laser}} = \frac{A_R}{A_L} \cong 10^{-8}$$

5°) Comme la divergence du faisceau réfléchi est égale à β =12'', le rayon R_T de la tache laser sur la terre est égal à :

$$R_T = D.\tan\frac{\beta}{2} \cong D\frac{\beta}{2} = 400000.\frac{5{,}8.10^{-5}}{2} = 11{,}6\ \text{kms}$$

La surface de la tache laser sur la terre est :

$$A_T = \pi R_T^2 = 425.10^6\ \text{m}^2$$

6°) L'énergie reçue par le télescope en fonction de l'énergie réfléchie par le panneau de cataphotes.

$$\rho_2 = \frac{\text{Energie reçue par le télescope}}{\text{Energie réfléchie par le panneau de cataphotes}}$$

$$\rho_2 = \frac{a_{\text{Télescope}}}{A_T} = 4.10^{-9}$$

$$\text{Energie reçue par le télescope} = \text{Energie émise par le laser}.\rho_1.\rho_2$$

$$\text{Energie reçue par le télescope} = 0{,}3.10^{-8}.4.10^{-9} = 10^{-17}\ \text{Joule}$$

Le nombre n de photons reçus par le télescope est égal à :

$$n = N\,\rho_1.\rho_2 = 8.10^{17}.4.10^{-17} = 32 \text{ photons par impulsion laser.}$$

On constate que le télescope recueille à peine 32 photons pour chaque impulsion émise sur un total de 8.10^{17} photons émis par le laser.

Exercice 11 : 1°) L'énergie émise en 1 seconde par la source lumineuse se trouve contenue dans un cylindre de volume V = Sc. L'énergie par unité de volume est égale à :

$$\frac{P}{S\,c}$$

L'énergie par unité de volume et par unité de fréquence ou densité spectrale d'énergie est égale à :

$$u(\nu) = \frac{P}{\Delta\nu\, S\, c} \quad (J.m^{-3}.Hz^{-1})$$

$$u(\nu) = \frac{3.10^{-3}}{100.10^{6}.10^{-6}.3.10^{8}} = 10^{-13}\ \ J.m^{-3}.Hz^{-1}$$

2°) On utilise la relation qui lie les coefficients d'Einstein A_{21} et B_{21} soit :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h}{\lambda^3} \qquad B_{21} = A_{21}\frac{\lambda^3}{8\pi h} = 10^7\,\frac{(0{,}6.10^{-6})^3}{8.\pi.6{,}62.10^{-34}} = 1{,}30.10^{20}$$

Comme les niveaux des deux niveaux E_1 et E_2 sont non dégénérés, on a :

$$B_{12} = B_{21} = B = 1{,}30.10^{20} \qquad A = 10^7$$

Les probabilités d'absorption et d'émission stimulée sont égales à :

$$B\,u = 1{,}30.10^{7}\ s^{-1}$$

3°) Ecrivons les équations d'évolutions des populations N_1 et N_2.

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1 Bu(\nu) - N_2 Bu(\nu) - N_2 A \quad (1)$$

où le terme $N_1 Bu(\nu)$ représente le nombre d'atomes qui quittent le niveau E_1 par absorption, le terme $N_2 Bu(\nu)$ représente le nombre d'atomes qui quittent le niveau E_2 par émission stimulée et le terme $N_2 A$ représente le nombre d'atomes qui quittent le niveau E_2 par émission spontanée.

En plus de l'équation ci-dessus, on doit écrire que la somme des populations des deux niveaux E_1 et E_2 est constante soit :

$$N_1 + N_2 = N \qquad (2)$$

En associant les équations (1) et (2) on obtient :

$$\frac{dN_2}{dt} = (N - N_2) Bu(\nu) - N_2 Bu(\nu) - N_2 A$$

$$\frac{dN_2}{dt} + N_2[A + 2Bu(\nu)] = NBu(\nu)$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est :

$$N_2(t) = Ce^{-[2Bu(\nu)+A]t} + N\frac{Bu(\nu)}{A + 2Bu(\nu)}$$

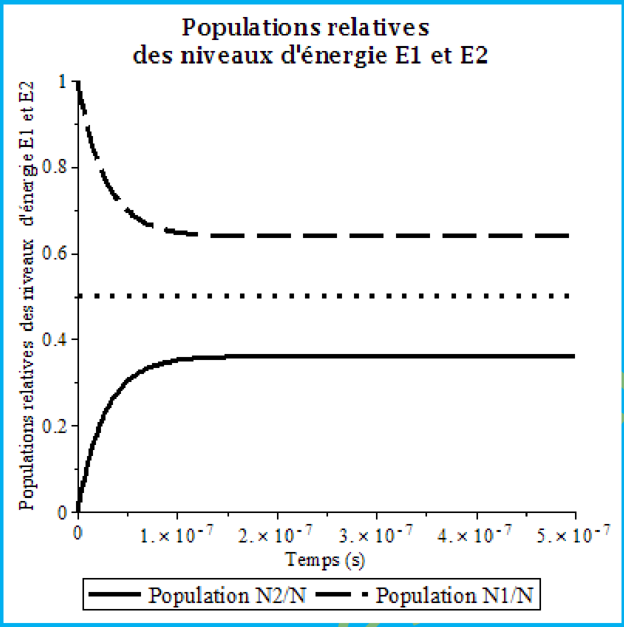
Comme à l'instant t = 0 on a $N_2(t = 0) = 0$ on a :

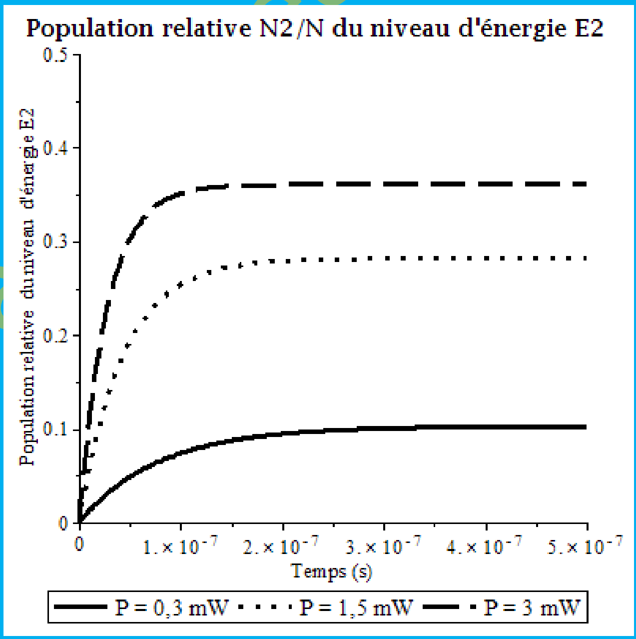
$$C = N\frac{Bu(\nu)}{A + 2Bu(\nu)}$$

L'expression définitive de la population du niveau d'énergie E_2 est :

$$N_2(t) = N\frac{Bu(\nu)}{A + 2Bu(\nu)}\left(1 - e^{-[A+2Bu(\nu)]t}\right)$$

$$N_1(t) = N - N_2(t) = N\left[\frac{A + Bu(\nu)}{A + 2Bu(\nu)}\left(1 - e^{-[A+2Bu(\nu)]t}\right)\right]$$


Populations relatives
des niveaux d'énergie E1 et E2
Populations relatives des niveaux d'énergie E1 et E2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1. × 10⁻⁷
2. × 10⁻⁷
3. × 10⁻⁷
4. × 10⁻⁷
5. × 10⁻⁷
Temps (s)
Population N2/N
Population N1/N


Population relative N2/N du niveau d'énergie E2
Population relative du niveau d'énergie E2
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1. × 10⁻⁷
2. × 10⁻⁷
3. × 10⁻⁷
4. × 10⁻⁷
5. × 10⁻⁷
Temps (s)
P = 0,3 mW
P = 1,5 mW
P = 3 mW

En régime permanent on obtient :

$$\begin{cases} N_1(t=\infty) = N\dfrac{A+Bu(\nu)}{A+2Bu(\nu)} \\ N_2(t=\infty) = N\dfrac{Bu(\nu)}{A+2Bu(\nu)} \end{cases}$$

4°) Calculons en régime permanent la différence ΔN de population soit :

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_1 - N_2}{N} = \frac{A+Bu(\nu)}{A+2Bu(\nu)} - \frac{Bu(\nu)}{A+2Bu(\nu)} > 0$$

On remarque que la différence ΔN de population est positive quelle que soit la valeur de la puissance incidente.

Comme on ne peut pas réaliser une inversion de population entre les populations N_1 et N_2, on ne peut pas réaliser un laser avec un système à deux niveaux d'énergie.

Exercice 12 : 1°) Les équations d'évolution de chacun des niveaux sont les suivantes :

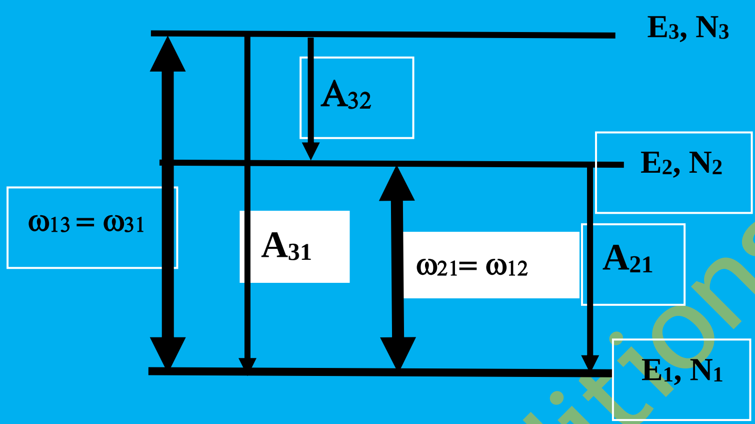
$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -(\omega_{12}+\omega_{13})N_1 + (\omega_{12}+A_{21})N_2 + (\omega_{13}+A_{31})N_3 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = A_{32}N_3 + \omega_{12}N_1 - (\omega_{12}+A_{21})N_2 \\ \dfrac{dN_3}{dt} = \omega_{13}N_1 - (\omega_{13}+A_{31}+A_{32})N_3 \end{cases}$$

2°) En régime stationnaire on obtient :

$$\begin{cases} (\omega_{12}+\omega_{13})N_1 = (\omega_{12}+A_{21})N_2 + (\omega_{13}+A_{31})N_3 \\ A_{32}N_3 + \omega_{12}N_1 = (\omega_{12}+A_{21})N_2 \\ \omega_{13}N_1 = (\omega_{13}+A_{31}+A_{32})N_3 \end{cases}$$

$$N_3 = \frac{\omega_{13}}{(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}N_1$$

$$A_{32}N_3 + \omega_{12}N_1 = (\omega_{12}+A_{21})N_2$$



$$\left[A_{32}\frac{\omega_{13}}{(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}+\omega_{12}\right]N_1=(\omega_{12}+A_{21})N_2$$

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{A_{32}\frac{\omega_{13}}{(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}+\omega_{12}}{(\omega_{12}+A_{21})}=\frac{A_{32}\omega_{13}+\omega_{12}(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}{(\omega_{12}+A_{21})(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}$$

Quand A_{31} et ω_{21} sont presque nuls et $A_{32} >> \omega_{13}$ on obtient :

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{A_{32}\omega_{13}+\omega_{12}(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}{(\omega_{12}+A_{21})(\omega_{13}+A_{31}+A_{32})}=\frac{A_{32}\,\omega_{13}}{A_{32}\,A_{21}}=\frac{\omega_{13}}{A_{21}}$$

Si on veut $\frac{N_2}{N_1} > 1$ soit une inversion de population entre les niveaux 1 et 2, il faut que $\omega_{13} \gg A_{21}$ c'est-à-dire que le pompage doit être beaucoup plus grand que la désexcitation du niveau métastable vers le niveau fondamental.

Remarque : Comme on a : $A_{32} \gg \omega_{13}$ et $A_{32} \gg A_{31}$

$$\frac{N_2}{N_1}\cong\frac{\omega_{12}\,A_{32}+\omega_{13}A_{32}}{(\omega_{12}+A_{21})\,A_{32}}=\frac{\omega_{12}+\omega_{13}}{\omega_{12}+A_{21}}$$

$$N_3 = \frac{\omega_{13}}{(\omega_{13} + A_{31} + A_{32})} N_1 \cong \frac{\omega_{13}}{A_{32}} N_1$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = N \qquad 1 + \frac{\omega_{12} + \omega_{13}}{\omega_{12} + A_{21}} + \frac{\omega_{13}}{A_{32}} = \frac{N}{N_1}$$

Comme $A_{32} \gg \omega_{13}$

$$\frac{N_1}{N} \cong \frac{1}{1 + \frac{\omega_{12} + \omega_{13}}{\omega_{12} + A_{21}} + \frac{\omega_{13}}{A_{32}}}$$

$$\frac{N_1}{N} = \frac{(\omega_{12} + A_{21})A_{32}}{(\omega_{12} + A_{21})A_{32} + (\omega_{12} + \omega_{13})A_{32} + \omega_{13}(\omega_{12} + A_{21})}$$

$$\frac{N_1}{N} = \frac{(\omega_{12} + A_{21})}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13} + \frac{\omega_{13}(\omega_{12} + A_{21})}{A_{32}}} \cong \frac{(\omega_{12} + A_{21})}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13}}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_{12}(\omega_{13} + A_{31} + A_{32}) + \omega_{13}A_{32}}{(\omega_{12} + A_{21})(\omega_{13} + A_{31} + A_{32})} \cong \frac{\omega_{12} + \omega_{13}}{\omega_{12} + A_{21}}$$

$$N_2 = N_1 \frac{\omega_{12} + \omega_{13}}{\omega_{12} + A_{21}}$$

$$\frac{N_2}{N} = \frac{(\omega_{12} + A_{21})}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13}} \frac{\omega_{12} + \omega_{13}}{\omega_{12} + A_{21}} = \frac{\omega_{12} + \omega_{13}}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13}}$$

$$\frac{N_2 - N_1}{N} = \frac{\Delta N}{N} = \frac{(\omega_{12} + \omega_{13}) - (\omega_{12} + A_{21})}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13}} = \frac{\omega_{13} - A_{21}}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13}}$$

Il y a amplification à condition que :

$$\omega_{13} > A_{21}$$

Le terme ω_{13} caractérise le chargement du niveau 2 via le niveau 3 et le terme A_{21} représente la vidange du niveau 2.

$$2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13} > 2\omega_{12} + A_{21} + A_{21} = 2(\omega_{12} + A_{21})$$

$$2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13} > \omega_{12} + A_{21}$$

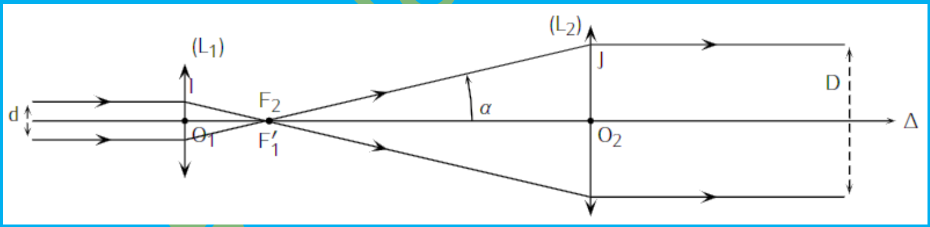
$$\frac{N_1}{N} = \frac{(\omega_{12} + A_{21})}{2\omega_{12} + A_{21} + \omega_{13}} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad N_1 < \frac{N}{2}$$

Exercice 13 : 1°) Le faisceau lumineux émis par le laser ne sera pas cylindrique. En raison du phénomène de diffraction, il sera légèrement divergent avec un demi angle au sommet égal à :

$$\theta \cong \frac{\lambda}{D} \cong \frac{\lambda}{2a} = \frac{5320.10^{-10}}{1{,}2.10^{-2}} = 44.10^{-6} = 44\ \mu\text{rad} \cong 9''\ \text{d'arc}$$

2°) On utilise un élargisseur de faisceau formé de deux lentilles convergentes de distance focales f'_1 et f'_2 telles que $F'_1 = F_2$ (système afocal c'est-à-dire le foyer image de la lentille L_1 confondu avec le foyer objet de la lentille L_2). Si on veut un élargissent du faisceau lumineux égal à 5, on doit avoir un rapport des distances focales des deux lentilles égal à 5 soit :

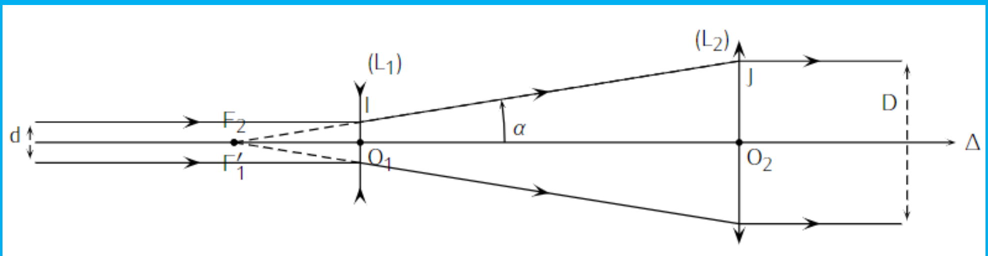
$$\mathbf{f'_2 = 5f'_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D = 5\ d}$$



Elargisseur de faisceau lumineux-Association de deux lentilles convergentes.

Comme le faisceau issu du laser a un angle de divergence de 44 µradian, alors le faisceau, après traversée de l'élargisseur de faisceau, aura un angle de divergence cinq fois plus petit soit 9 µradian.

Remarque : On peut réaliser un élargisseur de faisceau en faisant une association d'une lentille divergente L_1 et d'une lentille convergente L_2.



Elargisseur de faisceau lumineux-Association d'une lentille divergente et d'une lentille convergente.

3°) Une grande partie de l'énergie émise par le laser à impulsion n'atteint pas le réflecteur car le faisceau laser possède une ouverture angulaire en raison de la diffraction. En notant R_L le rayon du disque lumineux formé sur la surface de la Lune, on peut écrire :

$$\theta' \cong \tan\theta' = \frac{R_L}{L} \qquad R_L \cong L\,\theta'$$

Comme $\theta' = \frac{\theta}{5} = \frac{44.10^{-6}}{5} = 8{,}8\ \mu\text{rad} \cong 1{,}8''$ on aura :

$$R_L \cong L\,\theta' = 385.10^6.8{,}8.10^{-6} = 3400\ \text{m}$$

Le faisceau laser éclaire le sol lunaire avec une surface S' mais il est réfléchi par une surface S = 0,6 m^2 du dispositif réflecteur.

$$R_L \cong 3{,}4\ \text{kms} \qquad S' = \pi R_L^2 \cong 36.10^6\ \text{m}^2 \cong 36\ \text{km}^2$$

L'énergie réfléchie est donnée par le panneau de cataphotes est telle que :

$$\frac{\text{Energie réfléchie}}{\text{Energie incidente}} = \frac{\text{Surface du dispositif réflecteur}}{\text{Surface disque lumineux sur la surface de la Lune}}$$

$$\frac{\text{Surface du dispositif réflecteur}}{\text{Surface disque lumineux sur la surface de la Lune}} = \frac{S}{S'} \cong 1{,}6.10^{-8}$$

$$\rho_1 = \frac{\text{Energie réfléchie}}{\text{Energie incidente}} = \frac{N_r}{N_i} = \frac{S}{S'} = 1{,}6.10^{-8}$$

où ρ_1 est le rendement à la réflexion, N_r est le nombre de photons réfléchis par impulsion par le réflecteur et N_i le nombre de photons émis par impulsion par le laser.

Le nombre de photons réfléchis par impulsion par le réflecteur est égal à :

$$N_r = \rho_1 N_i$$

L'énergie de chaque photon émis par le laser est égale à :

$$e = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.10^{-34}.3.10^{8}}{5320.10^{-10}} = 3{,}73.10^{-19}\ \mathrm{J}$$

A chaque impulsion le laser émet :

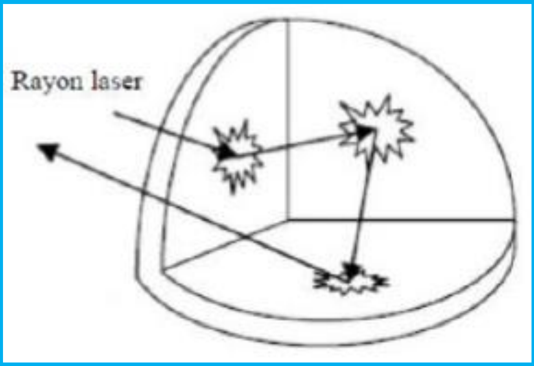
$$N_i = \frac{E}{e} = \frac{0{,}3}{3{,}73.10^{-19}} = 8.10^{17}\ \text{photons}$$

Le nombre de photons réfléchis N_r par impulsion vaut :

$$N_r = \rho_1 N_i = 1{,}6.10^{-8}.8.10^{17} = 1{,}28.10^{10}\ \text{photons}$$

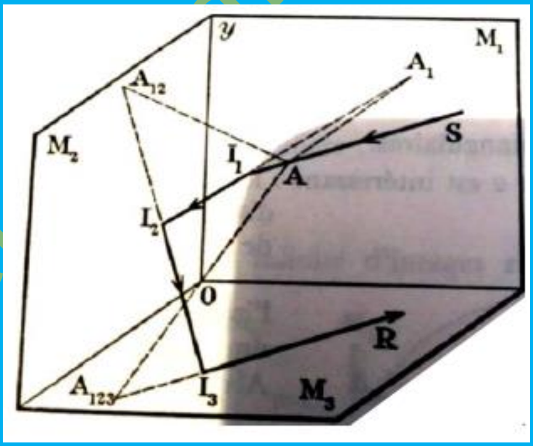
4°) Les cellules catadioptriques renvoient la lumière dans le sens opposé à la lumière incidente (équivalent à un effet boomerang).
Dans le cas de la mesure de la distance Terre-Lune, un ensemble de cataphotes est placé sur la Lune de façon à renvoyer les rayons lumineux exactement d'où ils viennent (rayon réfléchi parallèle au rayon incident).

Le système catadioptrique le plus simple est constitué par l'association de trois miroirs plans qui sont respectivement confondus avec les plans xOy, yOz et xOz d'un trièdre trirectangle. Un tel dispositif est utilisé par les feux arrière des véhicules et des vélos.

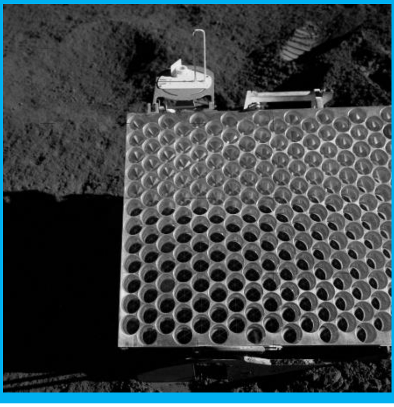


Principe d'un cataphote.

Les trois miroirs sont rencontrés par la lumière dans l'ordre $M_1M_2M_3$ et les images succéssives du point A sont A_1, A_{12},A_{123}.
On sait que A_1 est symétrique de A par rapport au plan M_1, A_{12} est symétrique de A par rapport à l'arête Oy commune à M_1 et M_2 que A_{123} est symétrique de A par rapport au sommet du trièdre.



Ainsi un rayon incident SI_1 (passant par A) donne un réfléchi définitif I_3R symétrique de SI_1 par rapport à O, donc de même direction que SI_1 mais de sens opposé.
Le plus grand réflecteur a été déposé par les astronautes de la mission Apollo XV le 26 Juillet 1971. Le panneau de dimension 1 m x 0,6 m contient 300 réflecteurs.



Panneau de cataphotes lunaires

Cycliste de nuit.

Remarque : En l'absence du panneau de réflecteurs, la réflexion du pulse lumineux se fait par l'intermédiaire du sol lunaire. En prenant en compte le coefficient de réflexion du sol lunaire égal à 7 %, on trouve que le nombre de photons collectés par le télescope est de l'ordre de 0,1 photon pour chaque impulsion laser. Dans un tel cas la mesure est très difficile à effectuer.

5°) Dans les calculs précédents, on n'a pas tenu compte de l'absorption lors de la traversée de l'atmosphère terrestre dont l'épaisseur est de l'ordre de 50 kms et des phénomènes de turbulence atmosphérique.
Le faisceau traverse deux fois l'atmosphère, à l'aller et au retour. La réfraction liée à la variation d'indice de l'air fait dévier le faisceau de sa trajectoire rectiligne. De plus les fluctuations dues à la turbulence des masses d'air contribuent aussi à la perte de photons entre l'émission et la réception du signal.

On doit aussi tenir compte du fait qu'une partie du trajet du faisceau laser s'effectue avec la vitesse de propagation de la lumière dans l'air soit $c = \frac{c_0}{n}$ où n est l'indice de réfraction de l'air qui varie en fonction de la pression atmosphérique, de la température et du taux d'humidité lesquels grandeurs varient avec l'altitude.

6°) Comme l'ouverture angulaire du faisceau réfléchi vers la Terre est égale à $\theta'' = 30$ µrad, on aura :

$$\theta'' \cong \tan\theta'' = \frac{R_T}{L} \qquad R_T \cong L\,\theta''$$

Le rayon R_T de la tache lumineuse sur la Terre est égale à :

$$R_T \cong L\,\theta'' = 385.10^6.30.10^{-6} = 11550 \text{ m}$$ (Voir la question n°3)

7°) L'énergie reçue par le télescope est donnée par :

$$\frac{\text{Surface du télescope}}{\text{Surface disque lumineux sur la surface de la Terre}} = \frac{S_{\text{Télescope}}}{S_{\text{Terre}}}$$

$$\frac{S_{\text{Télescope}}}{S_{\text{Terre}}} = \frac{S_{\text{Télescope}}}{\pi R_T^2} = \frac{\pi(0{,}75)^2}{\pi(11550)^2} = 4{,}21.10^{-9}$$

L'énergie reçue par la tache lumineuse sur la Terre est égale à l'énergie réfléchie par le dispositif réflecteur placé sur la Lune.

$$\frac{\text{Energie reçue par télescope}}{\text{Energie reçue par la Terre}} = \frac{S_{\text{Télescope}}}{S_{\text{Terre}}} = 4{,}21.10^{-9}$$

$$\frac{\text{Nombre de photons reçus par télescope}}{\text{Nombre de photons reçus par la Terre}} = \frac{S_{\text{Télescope}}}{S_{\text{Terre}}} = 4{,}21.10^{-9}$$

Le nombre de photons reçus par le télescope $N_{\text{Télescope}}$ est égal au nombre de photons réfléchis N_r par le dispositif réflecteur placé sur la Lune multiplié par le rapport $\frac{S_{\text{Télescope}}}{S_{\text{Terre}}}$

$$N_{\text{Télescope}} = N_r \frac{S_{\text{Télescope}}}{S_{\text{Terre}}} = 1{,}28.10^{10}.4{,}21.10^{-9}$$

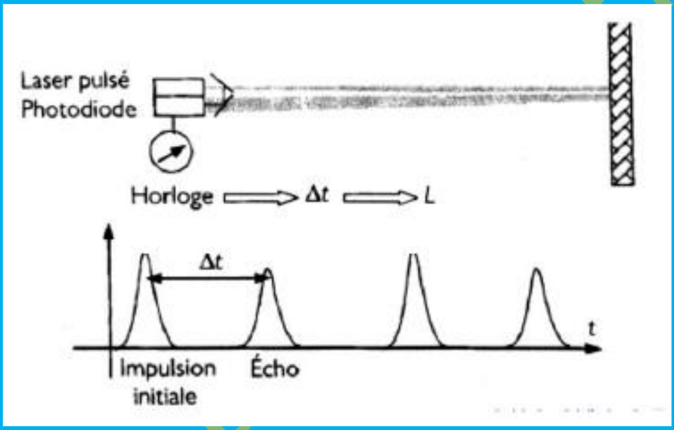
Le nombre de photons reçus par le télescope pour chaque impulsion laser est égal à :

$$N_{\text{Télescope}} \cong 54 \text{ photons}$$

8°) Entre l'émission et la réception, l'impulsion laser parcourt la distance Terre-Lune-Terre soit 2L. En admettant que l'impulsion se propage à la vitesse de la lumière dans le vide soit c = 3.10^5km/s, on obtient :

$$\Delta t = T = \frac{2L}{c} = \frac{2.385.10^3}{3.10^5} = 2{,}56 \text{ s}$$

Le laser pulsé envoie une série d'impulsions lumineuses très brèves sur une cible situé à une distance L. Le faisceau rétrodiffusé est détecté par une photodiode disposée à côté du laser (ou un télescope dans le cas de la mesure de la distance Terre-Lune).



On en déduit la distance L à partir de la mesure du retard Δt qui représente le temps mis par l'impulsion laser pour effectuer un trajet Terre-Lune-Terre.
Le temps de parcours aller-retour de l'impulsion doit être mesuré par une horloge de très grande précision car la précision du temps ΔT de parcours détermine la précision ΔL avec laquelle on mesure de la distance L.
En effet on a la relation :

$$T = \frac{2L}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta L = L\frac{\Delta T}{T} = \frac{T\,c}{2}\frac{\Delta T}{T} = \frac{c}{2}\Delta T$$

Au départ une petite fraction du signal lumineux déclenche le comptage de l'horloge soit à l'instant t_1 alors qu'au retour de l'écho une petite fraction arrête le comptage de l'horloge soit à l'instant t_2 (voir figure ci-dessus).
Pour que l'erreur ΔT sur le temps de parcours $\Delta t = T = (t_2 - t_1)$ soit la plus petite possible, il faudrait que les temps t_1 et t_2 soient déterminés avec la plus grande précision.

En général les erreurs sur la détermination des temps t_1 et t_2 sont au minimum de l'ordre de la largeur temporelle τ de l'impulsion laser.
En conséquence l'erreur ΔL est de l'ordre de $(c\tau)$ soit dans le cas où la durée de l'impulsion est égale à $\tau = 0{,}3\ \mu s$, on trouvera une erreur ΔL de l'ordre de :

$$\Delta L = c.\tau = 3.10^8.0{,}3.10^{-6} \cong 100\ \text{m}$$

soit une erreur de l'ordre de 100 m sur une distance de l'ordre de 4.10^5 m.
Si on travaille avec des impulsions très courtes de quelques nanosecondes, on trouvera une erreur ΔL de l'ordre de quelques dizaines de mètres.
En conséquence, plus la durée de l'impulsion est petite, plus la précision sur Δt sera grande et plus la distance Terre-Lune sera mesurée précisément.

Exercice 14 : 1°) En fonctionnement continu la puissance surfacique au niveau de la tache est égale à :

$$I_c = \frac{P_c}{S} = \frac{4.P_c}{\pi.D^2} = \frac{4.60}{\pi.10^{-8}} = 76{,}4.10^8\ \text{W/m}^2$$

En fonctionnement pulsé la puissance surfacique au niveau de la tâche est égale à :

$$I_c = \frac{P_p}{S} = \frac{4.P_p}{\pi.D^2} = \frac{4.300}{\pi.10^{-8}} = 382.10^8\ \text{W/m}^2$$

2°) En fonctionnement continu l'énergie transférée pendant une durée de 5 secondes est égale à :

$$E_c = P_c.\Delta t = 60.5 = 300\ \text{Joules}$$

En fonctionnement pulsé, l'énergie e_p contenue dans une impulsion est égale à :

$$e_p = P_p.\tau = 300.10^{-3} = 0{,}3\ \text{Joule}$$

Pendant $\Delta t = 5$ secondes l'énergie transférée est égale

$$\Delta t.\text{Fréquence}.e_p = 5.300.0{,}3 = 450 \text{ Joules}$$

3°) Si on désire découper un tissu (vaporisation de l'eau), il faut disposer d'une grande énergie. On travaillera en mode pulsé.
Dans le cas d'une cautérisation (coagulation des protéines sans vaporisation), il n'est pas nécessaire de disposer d'une grande énergie. On travaillera en mode continu.

Série du chapitre n°6

Exercice 01

$$B(C_{12}O_{16}) = \frac{h}{8\pi^2 I(C_{12}O_{16})c} = \frac{h}{8\pi^2 r_e^2 c}\frac{1}{\mu(C_{12}O_{16})}$$

$$B(C_{13}O_{16}) = \frac{h}{8\pi^2 I(C_{13}O_{16})c} = \frac{h}{8\pi^2 r_e^2 c}\frac{1}{\mu(C_{13}O_{16})}$$

$$B(C_{13}O_{16}) == B(C_{12}O_{16})\frac{m(C_{12})m(O_{16})}{m(C_{12})+m(O_{16})}\frac{m(C_{13})+m(O_{16})}{m(C_{13})m(O_{16})}$$

$$B(C_{13}O_{16}) = B(C_{12}O_{16})\frac{m(C_{12})}{m(C_{13})}\frac{m(C_{13})+m(O_{16})}{m(C_{12})+m(O_{16})}$$

$$B(C_{13}O_{16}) = 57900\frac{12}{13}\frac{29}{28} = 55355 \text{ MHz}$$

$$E_j = Bj(j+1) - Dj^2(j+1)^2$$

$$D(C_{13}O_{16}) = \frac{A}{[\mu(C_{13}O_{16})]^2} \qquad D(C_{12}O_{16}) = \frac{A}{[\mu(C_{12}O_{16})]^2}$$

$$D(C_{13}O_{16}) = D(C_{12}O_{16})\frac{[\mu(C_{12}O_{16})]^2}{[\mu(C_{13}O_{16})]^2} = D(C_{12}O_{16})\left[\frac{\mu(C_{12}O_{16})}{\mu(C_{13}O_{16})}\right]^2$$

$$D(C_{13}O_{16}) = 180\left[\frac{12.16}{28}\frac{29}{13.16}\right]^2 = 164{,}52 \text{ kHz}$$

$$\sigma_{j\to j+1} = 2B(j+1) - 4D(j+1)^3$$

$$\sigma_{j\to j+1}(C_{12}O_{16}) = 2B(C_{12}O_{16})(j+1) - 4D(C_{12}O_{16})(j+1)^3$$

$$\sigma_{j\to j+1}(C_{12}O_{16}) = 115800(j+1) - 0{,}72(j+1)^3$$

$$\begin{cases} C_{12}O_{16}: \sigma_{j\to j+1}(\text{MHz}) = 115800(j+1) - 0{,}72(j+1)^3 \\ C_{13}O_{16}: \sigma_{j\to j+1}(\text{MHz}) = 110710(j+1) - 0{,}65(j+1)^3 \end{cases}$$

Exercice 02 : Le nombre d'onde de la transition j → j+1 est égal à :

$$\sigma_{j\to j+1} = 2B(j+1) \qquad B(C_{12}O_{16}) = 1{,}93\ \text{cm}^{-1}$$

$$\begin{cases} \sigma_{j=0\to j=1} = 3{,}86\ \text{cm}^{-1} & \sigma_{j=1\to j=2} = 7{,}72\ \text{cm}^{-1} \\ \sigma_{j=2\to j=3} = 11{,}58\ \text{cm}^{-1} & \sigma_{j=3\to j=4} = 15{,}44\ \text{cm}^{-1} \end{cases}$$

$$\frac{B(C_{13}O_{16})}{B(C_{12}O_{16})} = \frac{I(C_{12}O_{16})}{I(C_{13}O_{16})} = \frac{\mu(C_{12}O_{16})}{\mu(C_{13}O_{16})} = \frac{12}{13}\,\frac{29}{28} = 0{,}9560$$

$$\frac{B(C_{13}O_{16})}{B(C_{12}O_{16})} = 0{,}9560 \qquad B(C_{13}O_{16}) = 0{,}9560.\,B(C_{12}O_{16})$$

$$B(C_{13}O_{16}) = 1{,}84\ \text{cm}^{-1}$$

$$\sigma_{j=0\to j=1}(C_{12}O_{16}) = 3{,}86\ \text{cm}^{-1}$$

$$\sigma_{j=0\to j=1}(C_{13}O_{16}) = 3{,}69\ \text{cm}^{-1}$$

La séparation Δ entre les deux raies de la transition j = 0→ j = 1 des deux isotopes est :

$$\Delta = \sigma_{j=0\to j=1}(C_{12}O_{16}) - \sigma_{j=0\to j=1}(C_{13}O_{16}) = 0{,}17\ \text{cm}^{-1}$$

Pour pouvoir distinctement les deux raies il faut disposer d'un dispositif d'enregistrement dont le pouvoir de résolution R est de l'ordre de :

$$R = \frac{\sigma_{j=0\to j=1}}{\Delta} \cong 22$$

En mesurant le rapport des intensités des deux raies, on peut connaitre l'abondance des deux isotopes du carbone.

Exercice 03 : Le moment d'inertie d'une molécule poly atomique linéaire est donné par l'expression ci-dessous :

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} m_i\, m_j l_{ij}^2}{2\sum_{i=1}^{i=n} m_i}$$

$$0CS: \qquad O = m_1 \qquad C = m_2 \qquad S = m_3$$

$^{16}O = {}^{12}C = {}^{32}S$ $\qquad l_{12} = O = C = 116{,}1$ pm $\qquad l_{23} = C = S = 156{,}1$ pm

$$I(0CS) = \frac{16(12l_{12}^2 + 32l_{13}^2) + 12(16l_{21}^2 + 32l_{23}^2) + 32(16l_{31}^2 + 12l_{32}^2)}{2.60}$$

$$I(0CS) = \frac{48.116{,}1^2 + 96.156{,}1^2 + 128.272{,}2^2}{15} 1{,}67.10^{-51}\ \mathrm{kg.m^2}$$

$$I(0CS) = 1{,}38.10^{-45}\mathrm{kg.m^2}$$

La constante de rotation B est égale à

$$B = \frac{h}{8\pi^2 I\, c} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{8.\pi^2.1{,}38.10^{-45}.3.10^8} = 20{,}25\ \mathrm{m^{-1}} = 0{,}2025\ \mathrm{cm^{-1}}$$

La constante D en unités ce cm^{-1} s'obtient en utilisant la relation 1 cm^{-1} = 30 GHz soit :

$$D = \frac{10^{-6}}{30}.1\ \mathrm{cm^{-1}} = 3{,}333.10^{-8}\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$\begin{cases} E(j+1) = B(j+1)(j+2) - D(j+1)^2(j+2)^2 \\ E(j) = Bj(j+1) - Dj^2(j+1)^2 \end{cases}$$

Le nombre d'onde de la transition j → j+1 est égal à :

$$\sigma_{j\to j+1} = E(j+1) - E(j) = 2B(j+1) - 4D(j+1)^3$$

$$\sigma_{j=10\to j=11} = 22B - 5324D = 4{,}455 - 1{,}7744.10^{-4} = 4{,}4548\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$\nu_{j=10\to j=11} = 133{,}6446\ \mathrm{GHz}$$

Exercice 04 : Calculons l'écart entre les nombres d'onde des raies d'absorption soit :

$\sigma_{j\rightarrow j+1}$	83,32	104,13	124,73	145,37	165,89	186,23	206,60
Δ	20,81	20,60	20,64	20,52	20,34	20,37	

La ligne du symbole Δ représente la différence des nombres d'onde de deux raies successives.On constate que l'écart Δ n'est pas tout à fait constant. On est en présence d'un rotateur qui n'est pas rigide. On peut déterminer l'écart moyen soit :

$$\Delta_{\text{Moyen}} = 20{,}54\ \text{cm}^{-1}$$

On en déduit la valeur de la constante de rotation soit :

$$B = \frac{\Delta_{\text{Moyen}}}{2} = 10{,}27\ \text{cm}^{-1}$$

Le moment d'inertie vaut :

$$I = \frac{h}{8\pi^2 Bc} = \frac{6{,}62.\,10^{-34}}{8.\,\pi^2.\,1027.3.\,10^8} = 2{,}72.\,10^{-47}\ \text{kg.\,m}^2$$

$$\mu = \frac{m_H.\,m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = \frac{35}{36}.\,1{,}67.\,10^{-27} = 1{,}62.\,10^{-27}\ \text{kg}$$

$$r_e = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{2{,}72.\,10^{-47}}{1{,}62.\,10^{-27}}} = 1{,}29.\,10^{-10}\ \text{m} = 1{,}29\ \text{Å}$$

Si on s'intéresse au même domaine spectral [83,32 - 206,60] on observera deux fois plus de raies d'absorption parce que la constante de rotation de la molécule $^{2}D^{35}Cl$ est égale à la moitié de la constante de rotation de la molécule $^{1}H^{35}Cl$.

On retrouve approximativement le spectre d'absorption de la molécule $^{1}H^{35}Cl$ auquel il faut ajouter une nouvelle raie entre deux raies successives du spectre d'absorption de la molécule $^{1}H^{35}Cl$.

Exercice 05 : 1°) La population du niveau de rotation j est d'une part proportionnelle au terme $e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$ (loi de Boltzmann) où E_j est l'énergie du niveau de rotation j et d'autre part proportionnelle à la dégénérescence (2j+1) du niveau de rotation j soit :

$$N_j = A(2j+1)e^{-\frac{E_j}{k_B T}} = A(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}}$$

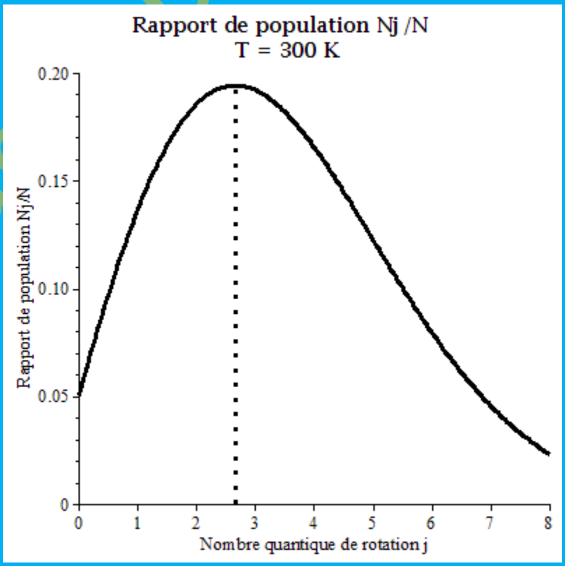
$$\sum_{j=0}^{j=\infty} N_j = A\sum_{j=0}^{j=\infty}(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}} = A\frac{k_B T}{B} = N \qquad A = N\frac{B}{k_B T}$$

$$\frac{N_j}{N} = \frac{B}{k_B T}(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}}$$

2°) Le maximum de la fonction N_j s'obtient par la dérivée soit :

$$\frac{dN_j}{dj} = \left[2 - (2j+1)\frac{B(2j+1)}{k_B T}\right]e^{-\frac{B\,j\,(j+1)}{k_B T}}$$

$$(2j+1)^2 = 2\frac{k_B T}{B} \qquad j_{max} = \sqrt{\frac{k_B T}{2B}} - \frac{1}{2}$$



$$T = 300\ K \qquad j_{max} \cong 2{,}6$$

On remarque que les niveaux j = 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont plus peuplés que le niveau fondamental j = 0. Ce résultat s'explique par la présence du terme de dégénérescence (2j+1).

Exercice 06 : La largeur Doppler d'une raie de fréquence $\nu_{j\to j'}$ s'écrit :

$$\Delta\nu_{j\to j'} = 7{,}15.10^{-7}\nu_{j\to j'}\sqrt{\frac{T}{M}} \qquad \frac{\Delta\nu_{j\to j'}}{\nu_{j\to j'}} = 7{,}15.10^{-7}\sqrt{\frac{T}{M}}$$

$$\frac{\Delta\nu_{j\to j'}}{\nu_{j\to j'}}(HCl) = 7{,}15.10^{-7}\sqrt{\frac{300}{36}} = 2.10^{-6}$$

$$\frac{\Delta\nu_{j\to j'}}{\nu_{j\to j'}}(ICl) = 7{,}15.10^{-7}\sqrt{\frac{300}{128}} = 1.10^{-6}$$

$$\nu_{j=0\to j'=1}(HCl) = 2B = 626{,}4\ GHz \qquad \Delta\nu_{j=0\to j'=1}(HCl) = 1{,}25\ MHz$$

$$\nu_{j=0\to j'=1}(ICl) = 2B = 6{,}6\ GHz \qquad \Delta\nu_{j=0\to j'=1}(ICl) = 6{,}6\ kHz$$

On remarque que la largeur de la raie de la molécule HCl est 200 fois plus grande que la largeur de la raie de la molécule ICl. On peut dire que, pour une température T donnée, plus la molécule est lourde plus la largeur de la raie est petite.

Exercice 07 : 1°) La largeur naturelle de la raie d'absorption j = 0 → j = 1 est égale à :

$$\Delta\nu_N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{64\pi^3\nu_{0\to 1}^3}{3hc^3}p^2 \qquad \nu_{j=0\to j=1} = 2B = 12160\ MHz$$

p = 0,71 Debye 1 Debye = 3,335.10 $^{-30}$ C.m p = 2,367. 10 $^{-30}$ C.m

$$\Delta\nu_N = \frac{64(12160.\pi)^3}{6{,}62.3^2}.2{,}367^2 = 3{,}355.10^{-9}\ Hz$$

2°) La largeur Doppler de la raie est égale à :

$$\Delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu_{0\to1}\sqrt{\frac{T}{M}} = 7{,}15.10^{-7}.12160.10^{6}\sqrt{\frac{300}{60}}$$

$$\Delta\nu_D = 19{,}44 \text{ kHz}$$

3°) Pour connaître la largeur collisionnelle $\Delta\nu_c$, il faut calculer la densité moléculaire n, le libre parcours moyen l, la vitesse v et le temps τ qui s'écoule entre deux collisions.

$$P = nk_BT \qquad n = \frac{P}{k_BT} = \frac{131{,}5}{1{,}38.10^{-23}.300} = 3{,}17.10^{22}\ \text{mol/m}^3$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi b^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}.\pi.7{,}5^2.10^{-20}.3{,}17.10^{22}} = 12{,}6.10^{-6}\ \text{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3.1{,}38.10^{-23}.300}{60.1{,}67.10^{-27}}} = 352\ \text{m/s}$$

$$\tau = \frac{l}{v} = 35{,}8.10^{-9}\ \text{s} \qquad \Delta\nu_C = \frac{1}{2\pi\tau} = 4{,}44\ \text{MHz}$$

En comparant les différentes causes d'élargissement des raies on a :

$$\Delta\nu_C > \Delta\nu_D > \Delta\nu_N$$

L'élargissement collisionnel est le plus important.

4°) La population du niveau de rotation j est d'une part proportionnelle au terme $e^{-\frac{E_j}{k_BT}}$ (loi de Boltzmann) où E_j est l'énergie du niveau de rotation j et d'autre part proportionnelle à la dégénérescence (2j+1) du niveau de rotation j soit :

$$N_j = A(2j+1)e^{-\frac{E_j}{k_BT}} = A(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}}$$

Dans cette formule les quantités B et k_BT doivent avoir la même unité.

$$B(\text{Joule}) = 1{,}983.10^{-23}B(\text{cm}^{-1})$$

Le maximum de la fonction N_j s'obtient par la dérivée soit :

$$\frac{dN_j}{dj} = A\left[2 - (2j+1)\frac{B(2j+1)}{k_B T}\right] e^{-\frac{B\,j\,(j+1)}{k_B T}}$$

$$(2j+1)^2 = 2\frac{k_B T}{B} \qquad\qquad j_{max} = \sqrt{\frac{k_B T}{2B}} - \frac{1}{2}$$

$$j_{max} = \sqrt{\frac{1{,}38.10^{-23}.300}{2.1{,}983.10^{-23}.0{,}202}} - \frac{1}{2} \cong 22$$

$$\sigma_{j=22\to j+1=23} = 2B(j_{max}+1) = 2.0{,}202.23\ \ cm^{-1} = 9{,}292\ cm^{-1}$$

$$\nu_{j=22\to j+1=23} = 9{,}292.30 = 278{,}76\ GHz$$

La largeur de la raie d'absorption associée à la transition j = 22 → j = 23 est égale à :

$$\Delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu_{j=22\to j+1=23}\sqrt{\frac{T}{M}} = 7{,}15.10^{-7}.278{,}76.10^{9}\sqrt{\frac{300}{60}}$$

$$\Delta\nu_D = 445\ kHz$$

En comparant les différentes causes d'élargissement des raies on aura cette fois :

$$\Delta\nu_D > \Delta\nu_C > \Delta\nu_N$$

L'élargissement Doppler est le plus important car les élargissements collisionnel et naturel restent inchangés.

Exercice 08 : **1°)** La constante de rotation B est égale à :

$$B = \frac{h}{8\pi^2 Ic} \qquad \mu = \frac{m_H.m_{Br}}{m_H + m_{Br}} = \frac{80}{81}.1{,}67.10^{-27} = 1{,}65.10^{-27}\ kg$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2\mu\, r_e^2 c} = 852\ m^{-1} = 8{,}52\ cm^{-1}$$

2°) La population du niveau de rotation j est d'une part proportionnelle au terme $e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$ (loi de Boltzmann) où E_j est l'énergie du niveau de rotation j et d'autre part proportionnelle à la dégénérescence (2j+1) du niveau de rotation j soit :

$$N_j = A(2j+1)e^{-\frac{E_j}{k_B T}} = A(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}}$$

$$\frac{N_j}{N_{j=0}} = (2j+1)e^{-\frac{B\,j\,(j+1)}{k_B T}}$$

Dans cette formule les quantités B et $k_B T$ doivent avoir la même unité.

$$B(\text{Joule}) = 1{,}983.\,10^{-23} B(\text{cm}^{-1})$$

Le maximum de la fonction N_j s'obtient par la dérivée soit :

$$\frac{dN_j}{dj} = \left[2 - (2j+1)\frac{B(2j+1)}{k_B T}\right] e^{-\frac{B\,j\,(j+1)}{k_B T}}$$

$$(2j+1)^2 = 2\frac{k_B T}{B} \qquad\qquad j_{max} = \sqrt{\frac{k_B T}{2B}} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{N_j}{N_{j=0}} = (2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}}$$

$$T = 300\text{ K} \quad k_B T = 209\text{ cm}^{-1} \qquad\qquad j_{max} = \sqrt{\frac{k_B T}{2B}} - \frac{1}{2} = 3$$

Le domaine spectral en nombres d'onde est :

$$[55.\,10^{-4}\text{ cm} - 155.\,10^{-4}\text{ cm}] \quad \Rightarrow \quad [64{,}5\text{ cm}^{-1} - 181{,}8\text{ cm}^{-1}]$$

Le nombre d'onde de la transition j → j+1 est égal à :

$$\sigma_{j\to j+1} = 2B(j+1) = 17{,}04(j+1)$$

$$\begin{cases} 17{,}04(j+1) = 64{,}5 & \rightarrow \quad j_1 = 2{,}78 \\ 17{,}04(j+1) = 181{,}8 & \rightarrow \quad j_2 = 9{,}67 \end{cases}$$

Les sept raies d'absorption observées seront caractérisées par les nombres quantiques entiers compris entre $j_1 = 3$ et $j_2 = 9$.

$$\sigma_{j=3\rightarrow j=4} = 68{,}16\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad \sigma_{j=4\rightarrow j=5} = 85{,}2\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\sigma_{j=5\rightarrow j=6} = 102{,}24\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad \sigma_{j=6\rightarrow j=7} = 119{,}28\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\sigma_{j=7\rightarrow j=8} = 136{,}32\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad \sigma_{j=8\rightarrow j=9} = 153{,}37\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\sigma_{j=9\rightarrow j=10} = 170{,}04\ \mathrm{cm}^{-1}$$

Dans l'échelle des longueurs d'onde on aura :

$$\lambda_{j=3\rightarrow j=4} = 146{,}7\ \mu\mathrm{m} \qquad \lambda_{j=4\rightarrow j=5} = 117{,}3$$

$$\lambda_{j=5\rightarrow j=6} = 97{,}8\ \mu\mathrm{m} \qquad \lambda_{j=6\rightarrow j=7} = 83{,}8{,}28\ \mu\mathrm{m}$$

$$\lambda_{j=7\rightarrow j=8} = 73{,}3\ \mu\mathrm{m} \qquad \lambda_{j=8\rightarrow j=9} = 65{,}6\ \mu\mathrm{m}$$

$$\lambda_{j=9\rightarrow j=10} = 58{,}8\ \mu\mathrm{m}$$

3°) On applique la règle de sélection $\Delta j = \pm 1$, l'intensité de la raie d'absorption relative à la transition $j \rightarrow j' = j+1$ s'écrit comme suit :

$$I^a_{j\rightarrow j+1} = C_a[2B(j+1)](2j+2)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}}$$

$$I^a_{j\rightarrow j+1} = C_a[2B(j+1)]2(j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}} = 4C_aB(j+1)^2e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}}$$

$$\frac{dI^a_{j\rightarrow j+1}}{dj} = 4C_aB\left[2(j+1) - (j+1)^2\frac{B(2j+1)}{k_BT}\right]e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}}$$

$$\frac{dI^a_{j\rightarrow j+1}}{dj} = 4C_aB(j+1)\left[2 - \frac{B}{k_BT}(j+1)(2j+1)\right] = 0$$

$$(j+1)(2j+1) - 2\frac{k_BT}{B} = 0$$

$$2j^2 + 3j + 1 - 2\frac{k_BT}{B} = 0 \qquad j_{max} = \frac{-3 + \sqrt{1 + 16\frac{k_BT}{B}}}{4} \cong -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{k_BT}{B}}$$

$$j_{max} \cong 4$$

La raie d'absorption la plus intense correspond à la transition $j = 4 \rightarrow j = 5$.

La longueur d'onde de la raie la plus intense est : $\lambda_{j=5\rightarrow j=6} = 117{,}3\ \mu m$

4°) La raie d'émission correspond à la transition $j \rightarrow j' = j - 1$.

$$I^e_{j\rightarrow j-1} = C_e\,[2Bj]^4(2j)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}} = 32C_eB^4\,j^5e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}}$$

$$\frac{dI^e_{j\rightarrow j+1}}{dj} = 32C_eB^4\left[5j^4 - j^5\,\frac{B(2j+1)}{k_BT}\right]e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_BT}} = 0$$

$$5 - j\,\frac{B(2j+1)}{k_BT} = 0 \qquad 5\frac{k_BT}{B} = j(2j+1)$$

$$2j^2 + j - 122{,}6 = 0 \qquad j_{max} = 7{,}6$$

La raie d'émission la plus intense correspond à la transition $j = 7 \rightarrow j = 8$.
La longueur d'onde de la raie la plus intense est : $\lambda_{j=7\rightarrow j=8} = 65{,}6\ \mu m$

Exercice 09 : 1°) Le moment d'inertie de la molécule $C^{12}\,O^{16}$ vaut :

$$I = \frac{h}{8\pi^2Bc} = \frac{6{,}62.\,10^{-34}}{8.\,\pi^2.\,193.3.\,10^8} = 1{,}44.\,10^{-46}\ kg.\,m^2$$

$$\mu = \frac{m_C.\,m_O}{m_C + m_O} = \frac{12.16}{12+16}.\,1{,}67.\,10^{-27} = 1{,}145.\,10^{-26}\ kg$$

$$r_e = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}44.\,10^{-46}}{1{,}145.\,10^{-26}}} = 1{,}12.\,10^{-10}\ m = 1{,}12\ \text{Å}$$

2°) La population du niveau de rotation j est d'une part proportionnelle au terme $e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$ (loi de Boltzmann) où E_j est l'énergie du niveau de rotation j et d'autre part proportionnelle à la dégénérescence (2j+1) du niveau de rotation j soit :

$$N_j = A(2j+1)e^{-\frac{E_j}{k_B T}} = A(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}}$$

$$\frac{N_j}{N_{j=0}} = (2j+1)e^{-\frac{B\,j\,(j+1)}{k_B T}}$$

Dans cette formule les quantités B et $k_B T$ doivent avoir la même unité.

$$B(\mathrm{Joule}) = 1{,}983.10^{-23} B(\mathrm{cm}^{-1})$$

Le maximum de la fonction N_j s'obtient par la dérivée soit :

$$\frac{dN_j}{dj} = \left[2 - (2j+1)\frac{B(2j+1)}{k_B T}\right] e^{-\frac{B\,j\,(j+1)}{k_B T}}$$

$$(2j+1)^2 = 2\frac{k_B T}{B} \qquad\qquad j_{max} = \sqrt{\frac{k_B T}{2B}} - \frac{1}{2}$$

$$T = 310{,}7\ \mathrm{K} \qquad k_B T = 216{,}16\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad j_{max} = 7$$

$$I^a_{j\to j+1} = C_a(j+1)(2j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}} = (2j^2+3j+1)e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}}$$

$$\frac{dI^a_{j\to j+1}}{dj} = \left[(4j+3) - (2j^2+3j+1)(2j+1)\frac{B}{k_B T}\right] e^{-\frac{Bj(j+1)}{k_B T}} = 0$$

Comme $\frac{k_B T}{B} = 112$, la solution de $\frac{dI^a_{j\to j+1}}{dj} = 0$ est donnée par la solution de l'équation suivante :

$$4j^3 + 8j^2 + 5j - 443j - 335 = 0 \qquad j^a_{max} = 10$$

$$\sigma_{j=10\to j=11} = 22B = 42{,}46\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad \lambda_{j=10\to j=11} = 235{,}5\ \mu\mathrm{m}$$

$$\Delta\nu_D = 7{,}15.10^{-7}\nu_{10\to 11}\sqrt{\frac{T}{M}} = 7{,}15.10^{-7}.42{,}46.30.10^9\sqrt{\frac{310{,}7}{28}}$$

$$\Delta\nu_D = 3\ \mathrm{MHz}$$

3°)

$$\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8\pi^2}{3c(k_BT)^2}Np^2hB\nu_{j\to j+1}^2(j+1)e^{-\frac{hBj(j+1)}{k_BT}}\frac{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)}{\left(\nu-\nu_{j\to j+1}\right)^2+\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}$$

Le détail du calcul du coefficient d'absorption par unité de longueur est :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8\pi^2}{3c(k_BT)^2} = 4{,}3.10^{43} \qquad Np^2 = 4{,}1.10^{-39}$$

$$hB = 3{,}83.10^{-23} \qquad \nu_{j\to j+1}^2 = 1{,}62.10^{24}$$

$$(j+1)e^{-\frac{hBj(j+1)}{k_BT}} = 9{,}94 \qquad \frac{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)}{\left(\nu-\nu_{j\to j+1}\right)^2+\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} = \frac{2}{\Delta\nu} = 2.10^{-7}$$

$$\gamma\left(\nu_{j=10\to j=11}\right) = 21{,}8\ \mathrm{m}^{-1} = 0{,}218\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$I_t(z=10) = e^{-2{,}18} = 0{,}113\ \mathrm{mW} = 113\ \mu\mathrm{W}$$

Exercice 10 : 1°) La deuxième ligne du tableau représente la différence d'énergie entre deux niveaux de vibration consécutifs. On remarque que cette différence est pratiquement constante et sa valeur donne une assez bonne valeur du nombre d'onde ω_e de vibration fondamentale.

E (cm^{-1})	948,5	2824,5	4672,5	6492,5	8284,5
Différence d'énergie	1876	1848	1820	1792	

On sait que l'énergie du niveau fondamental v = 0 est égale à $\omega_e/2$.

On en déduit facilement les nombres de vibration v des différents niveaux d'énergie de la molécule Na I soit :

Valeur de v	v = 0	v = 1	v = 2	v = 3	v = 4
E (cm^{-1})	948,5	2824,5	4672,5	6492,5	8284,5

2°)

$$\Delta E_v = \left(v+\frac{3}{2}\right)\omega_e - \omega_e x_e\left(v+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(v+\frac{1}{2}\right)\omega_e + \omega_e x_e\left(v+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Delta E_v = \omega_e - \omega_e x_e\left(v+\frac{3}{2}\right)^2 + \omega_e x_e\left(v+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Delta E_v = \omega_e - 2\omega_e x_e(v+1)$$

3°)

Valeur de v	v = 0	v = 1	v = 2	v = 3
ΔE_v (cm^{-1})	1876	1848	1820	1792

La constante d'anharmonicité $\omega_e x_e$ s'obtient à partir de la pente de la droite des points expérimentaux soit :

$$2\omega_e x_e = 28 \qquad \omega_e x_e = 14\ cm^{-1}$$

Le nombre d'onde de vibration fondamentale s'obtient à partir de la relation

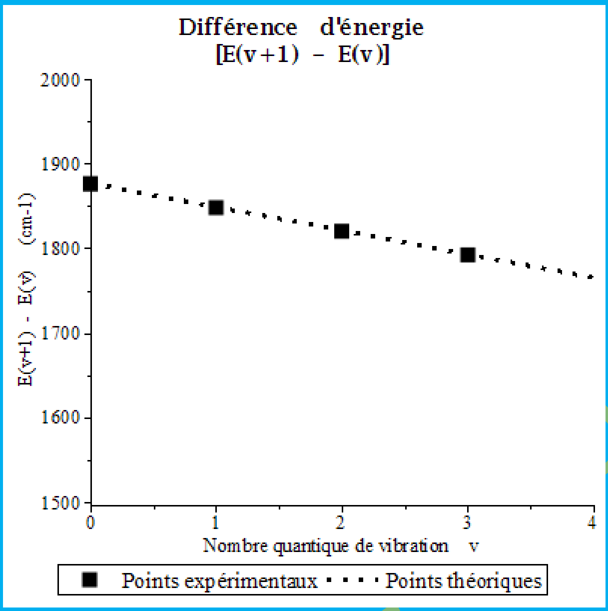
$$\Delta E_v = \omega_e - 2\omega_e x_e(v+1)$$

Pour v = 0 on a ΔE_v = 1876 soit :

$$\omega_e = \Delta E_v + 2\omega_e x_e = 1904\ cm^{-1}$$

La constante de force de liaison k est égale à :

$$k = \mu(2\pi c\omega_e)^2 = \frac{14.16}{14+16}1{,}67.10^{-27}.(2.\pi.3.10^8.190400)^2$$



$$k = 1606 \ N/m$$

4°) La quantité ΔE_v = E (v+1) - E (v) diminue et tend vers zéro quand le nombre quantique de vibration v augmente, c'est à dire quand l'énergie E_v se rapproche de l'énergie de dissociation de la molécule D_e.

$$\Delta E_v = \omega_e - 2\omega_e x_e (v+1) = 0 \qquad v = v_{max} \cong \frac{\omega_e}{2\omega_e x_e}$$

$$v_{max} \cong \frac{1904}{28} = 68$$

On calcule la valeur de l'énergie de dissociation de la molécule D_e pour la valeur de v = v_{max} soit :

$$D_e = E(v_{max}) = \left(v_{max} + \frac{1}{2}\right)\omega_e - \omega_e x_e \left(v_{max} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$D_e = \frac{\omega_e}{2\omega_e x_e}\omega_e + \frac{\omega_e}{2} - \omega_e x_e \left(\frac{\omega_e}{2\omega_e x_e}\right)^2 - \omega_e x_e \frac{\omega_e}{2\omega_e x_e} - \frac{\omega_e x_e}{4}$$

$$D_e = \frac{\omega_e^2}{4\omega_e x_e} - \frac{\omega_e x_e}{4}$$

Comme $\omega_e x_e \ll \omega_e$, la valeur de l'énergie de dissociation est égale à :

$$D_e = \frac{\omega_e^2}{4\omega_e x_e} \qquad D_e(NO) = \frac{1904^2}{4.14} = 64736\ cm^{-1} = 8\ eV$$

Exercice 11 : 1°)

$$\omega_e x_e = \frac{ha^2}{8\pi^2 c\mu} \qquad a^2 = \frac{\omega_e x_e 8\pi^2 c\mu}{h} = \frac{5200.8.\pi^2.3.10^8}{6{,}62.10^{-34}}\frac{35}{36}.1{,}67.10^{-27}$$

$$a^2 = 3{,}02.10^{20} \qquad a = 1{,}738.10^{10}\ m^{-1} \qquad a = 1{,}738\ Å^{-1}$$

$$\omega_e x_e = \frac{h\omega_e^2 c}{4D_e} \qquad D_e = \frac{h\omega_e^2 c}{4\omega_e x_e} = \frac{6{,}62.10^{-34}.298970^2.3.10^8}{4.5200}$$

$$D_e = 8{,}53.10^{-19}\ J = 5{,}33\ eV$$

$$V(r) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_e)}\right]^2 = 5{,}33\left[1 - e^{-1{,}738(r-1{,}27)}\right]^2$$

2°) Effectuons un développement limité au voisinage de la position d'équilibre $r = r_e$.

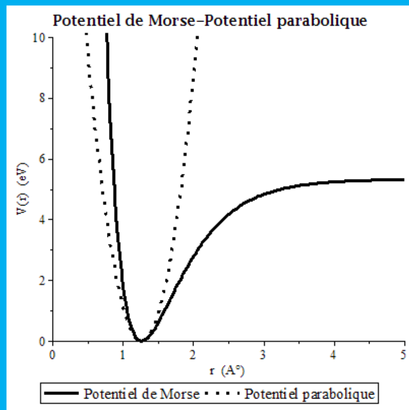
On trouve :

$$V(r) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_e)}\right]^2 \cong D_e[1 - \{1 - a(r - r_e)\}]^2 = D_e a^2 (r - r_e)^2$$

$$V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_e)^2 = D_e a^2 (r - r_e)^2 \qquad k = 2D_e a^2$$

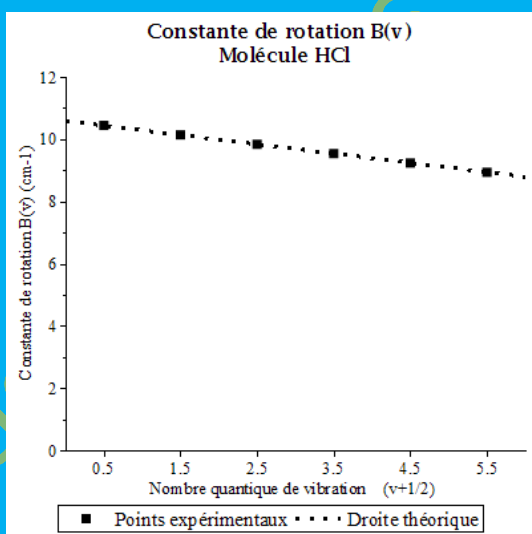
$$k = 2D_e a^2 = 2.8{,}53.10^{-19}.3{,}02.10^{20} = 515{,}2\ N/m$$

Le potentiel de Morse et le potentiel parabolique se confondent lorsque la longueur de la liaison r est très voisine de la longueur de la liaison à l'équilibre $r = r_e$.



Exercice 12 : 1°) On sait que la constante de rotation B_v est inversement proportionnelle au moment d'inertie de la molécule. Par conséquent elle diminue quand le nombre quantique de vibration v augmente car la longueur de la liaison moléculaire augmente.

2°)



	X = v+1/2	$Y = B_v$	XY	X^2	Y^2
	0.5	10,4400	5,22	0,25	108,9936
	1.5	10,1366	15,2049	2,25	102,7506

	2.5	9,8329	24,5822	6,25	96,6859
	3.5	9,5343	33,3700	12,25	90,9028
	4.5	9,232	41,544	20,25	85,2298
	5.5	8,933	49,1315	30,25	79,7984
Somme	18	58,1088	169,0526	71,5	564,3611
Moyenne	3	9,6848	28,1754	11,9166	94,0601

$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{COV(X;Y)}{V(X)} \qquad COV(X;Y) = \overline{X\,Y} - \overline{X}\,\overline{Y} \qquad V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

$$a = \frac{COV(X;Y)}{V(X)} = -0{,}3013$$

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X} = 9{,}6848 + 0{,}3013.3 = 10{,}5887$$

$$B_v = -0{,}3013.\left(v + \frac{1}{2}\right) + 10{,}5887$$

$$B_{v=0} = 10{,}44\ cm^{-1} \qquad B_{v=0} = \frac{h}{8\pi^2 I(v=0)c} \qquad I(v=0) = \frac{h}{8\pi^2 B_{v=0} c}$$

$$I(v=0) = 2{,}677.10^{-47}\ kg.m^2 \qquad r_e(v=0) = \sqrt{\frac{I(v=0)}{\mu(HCl_{35})}} = 1{,}28\ \text{Å}$$

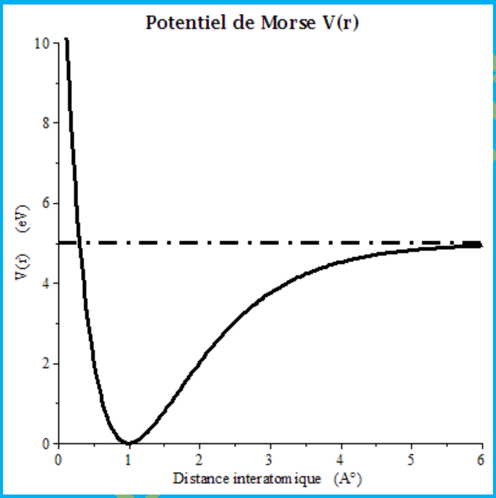
$$B_{v=5} = 8{,}933\ cm^{-1} \qquad B_{v=0} = \frac{h}{8\pi^2 I(v=5)c} \qquad I(v=5) = \frac{h}{8\pi^2 B_{v=5} c}$$

$$I(v=5) = 3{,}128.10^{-47}\ \mathrm{kg.m^2} \qquad r_e(v=5) = \sqrt{\frac{I(v=5)}{\mu(HCl_{35})}} = 1{,}38\ \text{Å}$$

La longueur de la liaison augmente avec le nombre quantique de vibration v.

Exercice 13 : **1°)** $$V(r) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_e)}\right]^2$$

Faisons le graphe de V(r) pour D_e = 5 eV et r_e = 1 Å.



Le minimum de l'énergie potentielle d'interaction est nul pour r = r_e.

2°) Faisons un développement limité autour de la position d'équilibre r = r_e

$$V(r) = V(r=r_e) + \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_e}(r-r_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_e}(r-r_e)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_{r=r_e}(r-r_e)^3$$

$$V(r=r_e) = 0$$

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = 2D_e\left[1 - e^{-a(r-r_e)}\right]ae^{-a(r-r_e)} = 2aD_e\left[e^{-a(r-r_e)} - e^{-2a(r-r_e)}\right]$$

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = 0 \qquad r = r_e$$

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) = 2a^2D_e\left[2e^{-2a(r-r_e)} - e^{-a(r-r_e)}\right] \qquad \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_e} = 2a^2D_e$$

$$\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right) = 2a^3D_e\left[-4e^{-2a(r-r_e)} + e^{-a(r-r_e)}\right] \qquad \left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_{r=r_e} = -6a^3D_e$$

$$V(r) = a^2D_e(r-r_e)^2 - a^3D_e(r-r_e)^3$$

$$\frac{\text{Amplitude du terme non sinusoÏdal}}{\text{Amplitude du terme sinusoÏdal}} = a$$

3°) Si on se limite à l'ordre 2, la fonction V (r) s'écrit au voisinage de r = r_e :

$$V(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_e}(r-r_e)^2 = \frac{1}{2}2a^2D_e(r-r_e)^2$$

$$x = (r-r_e) \qquad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Potentiel parabolique: Mouvement sinusoidal $\quad k = 2a^2D_e$

$$\nu_{osc} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \omega_e = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{a}{2\pi c}\sqrt{\frac{2D_e}{\mu}}$$

Exercice 14 :

E (cm^{-1})	142,81	427,31	710,31	991,81	1271,81
Différence d'énergie	284,5 283 281,5 280				

La deuxième ligne du tableau représente la différence d'énergie entre deux niveaux de vibration consécutifs. On remarque que cette différence est pratiquement constante et sa valeur donne une assez bonne valeur du nombre d'onde ω_e de vibration fondamentale.

On sait que l'énergie du niveau fondamental v = 0 est égale à $\omega_e/2$. On en déduit facilement les nombres de vibration des différents niveaux d'énergie de la molécule Na I soit :

Valeur de v	v = 0	v = 1	v = 2	v = 3	v = 4
E (cm^{-1})	142,81	427,31	710,31	991,81	1271,81

$\Delta E_0 = E_1 - E_0 = 284{,}5\ cm^{-1}$ $\qquad$ $\Delta E_1 = E_2 - E_1 = 283\ cm^{-1}$

$\Delta E_2 = E_3 - E_2 = 281{,}5\ cm^{-1}$ $\qquad$ $\Delta E_3 = E_4 - E_3 = 280\ cm^{-1}$

$$\Delta E_v = \left(v + \frac{3}{2}\right)\omega_e - \omega_e x_e \left(v + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(v + \frac{1}{2}\right)\omega_e + \omega_e x_e \left(v + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Delta E_v = \omega_e - \omega_e x_e \left(v + \frac{3}{2}\right)^2 + \omega_e x_e \left(v + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Delta E_v = \omega_e - 2\omega_e x_e (v + 1)$$

$$\begin{cases} \Delta E_0 = 284{,}5 = \omega_e - 2\omega_e x_e \\ \Delta E_1 = 283 = \omega_e - 4\omega_e x_e \\ \Delta E_2 = 281{,}5 = \omega_e - 6\omega_e x_e \\ \Delta E_3 = 280 = \omega_e - 8\omega_e x_e \end{cases} \qquad \omega_e = 286\ cm^{-1} \qquad \omega_e x_e = 0{,}75\ cm^{-1}$$

La quantité ΔE_v = E (v+1) - E (v) diminue et tend vers zéro quand l'énergie E_v se rapproche de l'énergie de dissociation de la molécule D_e.

$$\Delta E_v = \omega_e - 2\omega_e x_e (v + 1) = 0 \qquad v = v_{max} \cong \frac{\omega_e}{2\omega_e x_e}$$

$$v_{max} \cong \frac{286}{0{,}75} = 381$$

On calcule la valeur de l'énergie de dissociation de la molécule D_e pour la valeur de v = v_{max} soit :

$$D_e = E(v_{max}) = \left(v_{max} + \frac{1}{2}\right)\omega_e - \omega_e x_e \left(v_{max} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$D_e = \frac{\omega_e^2}{4\omega_e x_e} - \frac{\omega_e x_e}{4}$$

Comme $\omega_e x_e \ll \omega_e$, la valeur de l'énergie de dissociation est égale à :

$$D_e = \frac{\omega_e^2}{4\omega_e x_e} \qquad D_e(\mathrm{NaI}) = \frac{286^2}{4.0{,}75} = 27265\ \mathrm{cm^{-1}} = 3{,}38\ \mathrm{eV}$$

Exercice 15 : **1°)** En supposant que les constantes de force de liaison k sont égales dans les deux molécules, les nombres d'onde de vibration fondamentales ω_e et ω_e^i s'écrivent comme suit :

$$\omega_e = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{et} \quad \omega_e^i = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu_i}} \qquad \frac{\omega_e^i}{\omega_e} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_i}} = \rho$$

2°) $$\omega_e x_e = \frac{A}{\mu} \quad \text{et} \quad (\omega_e x_e)^i = \frac{A}{\mu_i} \qquad \frac{(\omega_e x_e)^i}{\omega_e x_e} = \frac{\mu}{\mu_i} = \rho^2$$

$$\sigma_{0\to v} = (\omega_e - \omega_e x_e)v - \omega_e x_e v^2$$

$$\sigma_{0\to v}^i = [\omega_e \rho - (\omega_e x_e)\rho^2]v - (\omega_e x_e)\rho^2 v^2$$

3°) L'écart $\Delta\sigma_{0\to v} = \sigma_{0\to v} - \sigma_{0\to v}^i$ entre les nombres d'onde de vibration des deux molécules est égal à :

$$\Delta\sigma_{0\to v} = (\omega_e - \omega_e x_e)v - \omega_e x_e v^2 - [\omega_e\rho - (\omega_e x_e)\rho^2]v + (\omega_e x_e)\rho^2 v^2$$

$$\Delta\sigma_{0\to v} = \omega_e(1-\rho)v - \omega_e x_e(1-\rho^2)v - \omega_e x_e(1-\rho^2)v^2$$

4°)

$$\Delta\sigma_{0\to v=1} = \omega_e(1-\rho) - 2\,\omega_e x_e(1-\rho^2)$$

$$\Delta\sigma_{0\to v=2} = 2\omega_e(1-\rho) - 6\omega_e x_e(1-\rho^2)$$

$$\Delta\sigma_{0\to v=3} = 3\omega_e(1-\rho) - 12\,\omega_e x_e(1-\rho^2)v$$

ω_e (HCl ^{35}) = 2989,7 cm $^{-1}$ et $\omega_e x_e$ (H Cl ^{35}) = 52 cm $^{-1}$.

$$\rho^2 = \frac{\mu}{\mu_i} = \frac{\mu(HCl_{35})}{\mu(HCl_{37})} = \frac{35}{36}\frac{38}{37} = 0{,}9985 \qquad \rho = 0{,}9992$$

$$\Delta\sigma_{0\to v=1} = 2{,}23\ \text{cm}^{-1} \qquad \Delta\sigma_{0\to v=2} = 4{,}31\ \text{cm}^{-1} \qquad \Delta\sigma_{0\to v=3} = 6{,}24\ \text{cm}^{-1}$$

Si on néglige la constante d'anharmonicité $\omega_e x_e$, les écarts $\Delta\sigma_{0\to v}$ sont proportionnels au nombre quantique de vibration v.

Le pouvoir de résolution R d'un spectrographe capable de séparer les deux raies de la branche fondamentale est égale à :

$$R = \frac{\sigma_{0\to v=1}}{\Delta\sigma_{0\to v=1}} \cong \frac{2990}{2{,}23} = 1340$$

Exercice 16

$$N(v) = Ae^{-\frac{\omega_e}{k_B T}\left(v+\frac{1}{2}\right)} \qquad \sum_{v=0}^{v=\infty} N(v) = N = A\,e^{-\frac{\omega_e}{2\,k_B T}} \sum_{v=0}^{v=\infty} e^{-\frac{\omega_e}{k_B T}v}$$

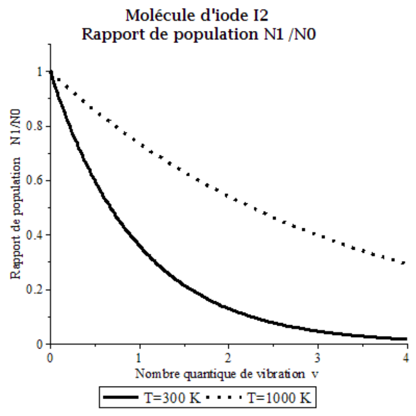
$$A = N\frac{e^{\frac{\omega_e}{2\,k_B T}}}{\sum_{v=0}^{v=\infty} e^{-\frac{\omega_e}{k_B T}v}} = N\,e^{\frac{\omega_e}{2\,k_B T}}\left(1 - e^{-\frac{\omega_e}{k_B T}}\right)$$

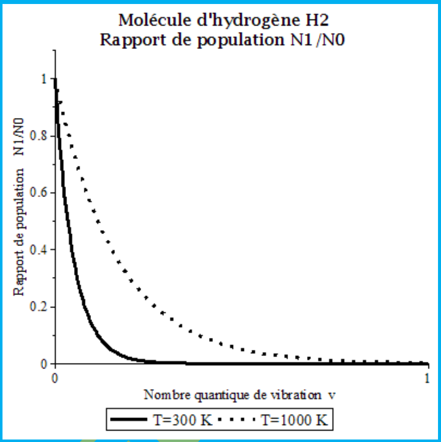
$$\frac{N(v)}{N} = \left(1 - e^{-\frac{\omega_e}{k_B T}}\right)e^{-\frac{\omega_e}{k_B T}v}$$

$$T = 300\ K \begin{cases} H_2 : \dfrac{N(v)}{N} = 0{,}9999e^{-20v} \\ I_2 : \dfrac{N(v)}{N} = 0{,}6412e^{-1{,}025v} \end{cases}$$

$$T = 1000\ K \begin{cases} H_2 : \dfrac{N(v)}{N} = 0{,}9975e^{-6v} \\ I_2 : \dfrac{N(v)}{N} = 0{,}2648e^{-0{,}3076v} \end{cases}$$

On a choisi deux molécules dont les nombres d'onde de vibration fondamentale sont différents, 213 pour l'iode et 4160 pour l'hydrogène.





Pour la molécule d'iode on remarque que les niveaux v = 1 et v = 2 sont peuplés même à la température ambiante T = 300 K.

Pour la molécule d'hydrogène on remarque que le niveau v = 1 est pratiquement vide même à la température T = 1000 K.

Exercice 17 : 1°) Les raies de la branche P (ou de la branche R) sont à peu près équidistantes. L'écart entre deux raies consécutives est égal à 2B.

On peut dire que : $B(v = 0) \cong B(v = 1) \cong 10\ \mathrm{cm}^{-1}$

Le nombre d'onde de vibration fondamentale se trouve au milieu de l'intervalle qui sépare les raies $\sigma_R(j=0)$ et $\sigma_P(j=1)$ soit :

$$\omega_e \cong 2990\ \mathrm{cm}^{-1}$$

En se référant au cours, on utilise la relation ci-dessous soit :

$$D \cong \frac{4B^3}{\omega_e^2} = \frac{4.1000}{3000^2} = 4.\,10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$$

2°)

$$E_{v=1,j} = \frac{3}{2}\omega_e + B(v=1)j(j+1) - D(v=1)j^2(j+1)^2$$

$$E_{v=0,j} = \frac{3}{2}\omega_e + B(v=0)j(j+1) - D(v=0)j^2(j+1)^2$$

$$\sigma_R(j) = E_{v=1,j+1} - E_{v=0,j} \qquad \sigma_P(j) = E_{v=1,j-1} - E_{v=0,j}$$

$$\sigma_R(j) = \omega_e + B_1(j+1)(j+2) - B_0 j(j+1) - D_1(j+1)^2(j+2)^2 + D_0 j^2(j+1)^2$$

$$\sigma_P(j) = \omega_e + B_1 j(j-1) - B_0 j(j+1) - D_1 j^2(j-1)^2 + D_0 j^2(j+1)^2$$

$$\sigma_R(j-1) = \omega_e + B_1 j(j+1) - B_0 j(j-1) - D_1 j^2(j+1)^2 + D_0\, j^2(j-1)^2$$

$$\sigma_P(j+1) = \omega_e + B_1 j(j+1) - B_0(j+1)(j+2) - D_1 j^2(j+1)^2 + D_0(j+1)^2(j+2)^2$$

$$\Delta_1(j) = \sigma_R(j) - \sigma_P(j) = 4B_1\left(j+\frac{1}{2}\right) - 8D_1\left(j+\frac{1}{2}\right)(j^2+j+1)$$

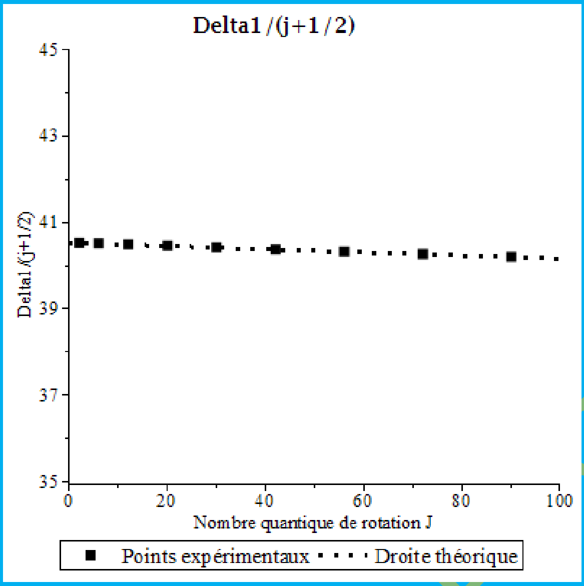
$$\frac{\Delta_1(j)}{\left(j+\frac{1}{2}\right)} = 4B_1 - 8D_1\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

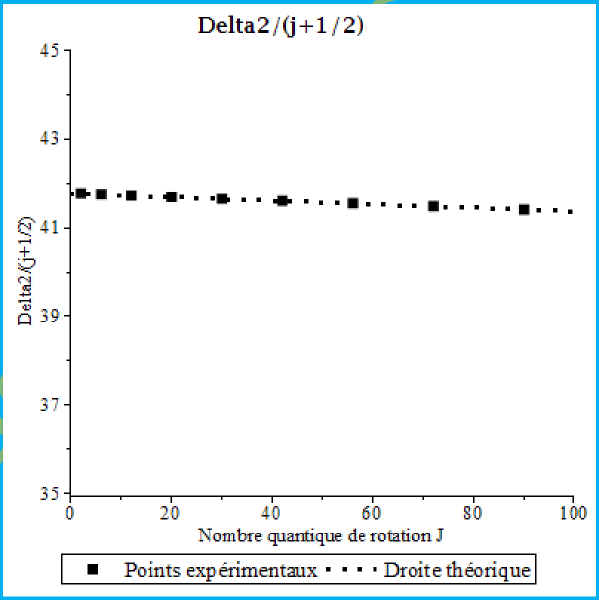
$$\Delta_2(j) = \sigma_R(j-1) - \sigma_P(j+1) = 4B_0\left(j+\frac{1}{2}\right) - 8D_0\left(j+\frac{1}{2}\right)(j^2+j+1)$$

$$\frac{\Delta_2(j)}{\left(j+\frac{1}{2}\right)} = 4B_0 - 8D_0\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

3°) Droite théorique $\Delta_1/(j+1/2)$:

$$\frac{\Delta_1(j)}{\left(j+\frac{1}{2}\right)} = 4B_1 - 8D_1\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$





$$\frac{\Delta_1(\mathrm{j})}{\left(\mathrm{j}+\frac{1}{2}\right)} = -3{,}659.10^{-3}\left(\mathrm{j}+\frac{1}{2}\right)^2 + 40{,}514$$

$$8D_1 = 3{,}659.10^{-3} \qquad D_1 = 4{,}57.10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$4B_1 - 6.D_1 = 40{,}514 \qquad B_1 = 10{,}13\ \text{cm}^{-1}$$

$$I_1 = 2{,}75\ 10^{-47}\ \text{kg.m}^2 \qquad r_e = 1{,}30\ \text{Å}$$

Droite théorique $\Delta_2/(j+1/2)$:

$$\frac{\Delta_2(j)}{\left(j+\frac{1}{2}\right)} = 4B_0 - 8D_0\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

$$\frac{\Delta_2(j)}{\left(j+\frac{1}{2}\right)} = -4{,}159.10^{-3}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + 41{,}762$$

$$8D_0 = 4{,}159.10^{-3} \qquad D_0 = 5{,}198.10^{-4}\ \text{cm}^{-1}$$

$$4B_0 - 6.D_0 = 41{,}762 \qquad B_0 = 10{,}44\ \text{cm}^{-1}$$

$$I_0 = 2{,}67.10^{-47}\ \text{kg.m}^2 \qquad r_e = 1{,}28\ \text{Å}$$

$$\sigma_P(j=1) = \omega_e - 2B_0 + 4D_0$$

$$\omega_e = 2969{,}12 + 2.10{,}44 - 4.5{,}198.10^{-4} = 2990\ \text{cm}^{-1}$$

$$\sigma_R(j=0) = \omega_e + 2B_1 - 4D_1$$

$$\omega_e = 3010{,}26 - 2.10{,}13 + 4.4{,}57.10^{-4} = 2989{,}60\ \text{cm}^{-1}$$

Si on néglige la variation des longueurs de liaison quand on passe de l'état de vibration v = 0 à l'état de vibration v = 1, les constantes de rotation B_0 et B_1 sont égales. Dans ce cas l'écart entre deux raies consécutives appartenant à la branche R ou à la branche P est égal à 2B où $B = B_0 = B_1$.

En négligeant les termes en D_0 et D_1 dans les expressions de $\sigma_R(j)$ et $\sigma_R(j+1)$ on obtient :

$$\sigma_R(j+1) - \sigma_R(j) = 2B_1(j+2) - 2B_0(j+1)$$

$$\sigma_R(j+1) - \sigma_R(j) = 0 \quad \Rightarrow \quad j_0 = \frac{2B_1 - B_0}{(B_0 - B_1)} \cong 32$$

$$\sigma_R(j_0) = 3334 \text{ cm}^{-1}$$

Exercice 18

A) 1°) Un spectre de rotation pure est constitué d'une suite de raies équidistantes situées dans le domaine des microondes. Dans cet exercice les raies ne sont pas équidistantes et elles sont dans le domaine infra rouge.

Un spectre de vibration pure se compose d'une raie unique, alors que dans cet exercice il y a plusieurs raies. On est en présence d'un spectre de vibro-rotation.

2°) La constante de rotation B est égale à B = 10 cm^{-1}.

3°) Le nombre d'onde de vibration fondamentale est égal à ω_e= 2885 cm^{-1}.

4°) Les raies de la branche R sont caractérisées par les nombres quantiques

$$v = 0, j \rightarrow v = 1, j + 1$$

Les nombres d'onde des raies de la branche R sont plus grands que le nombre d'onde de vibration fondamentale ω_e = 2885 cm^{-1}.

Les raies de la branche R sont : 2906, 2926, 2945, 2963 et 2981.

Les raies de la branche P sont caractérisées par les nombres quantiques

$$v = 0, j \rightarrow v = 1, j - 1$$

Les nombres d'onde des raies de la branche P sont plus petits que le nombre d'onde de vibration fondamentale ω_e= 2885 cm^{-1}.

Les raies de la branche P sont : 2776, 2799, 2821, 2843 et 2865.

Branche P				
P(5) = 2776	P(4) = 2799	P(3) = 2821	P(2) = 2843	P(1) = 2865
j = 5 → j' = 4	j = 4 → j' = 3	j = 3 → j' = 2	j = 2 → j' = 1	j = 1 → j' = 0

Branche R				
R(0) = 2906	R(1) = 2926	R(2) = 2945	R(3) = 2963	R(4) = 2981
j = 0 → j' = 1	j = 1 → j' = 2	j = 2 → j' = 3	j = 3 → j' = 4	j = 4 → j' = 5

B) $j \to j+1:\ \sigma_R(j) = \sigma_{v=0\to v=1} + B_1(j+1)(j+2) - B_0 j(j+1) \quad j = 0.1..$

$$\sigma_R(j) = \sigma_{v=0\to v=1} + 2B_1 + (3B_1 - B_0)j + (B_1 - B_0)j^2 \qquad j = 0,1,2..$$

$$j \to j-1:\ \sigma_P(j) = \sigma_{v=0\to v=1} + B_1 j(j-1) - B_0 j(j+1) \qquad j = 1,2.3..$$

$$\sigma_P(j) = \sigma_{v=0\to v=1} - (B_1 + B_0)j + (B_1 - B_0)j^2 \quad j = 1,2.3..$$

$$L(j) = \sigma_R(j) - \sigma_P(j) = 2B_1 + (3B_1 - B_0)j + (B_1 + B_0)j$$

$$L(j) = 2B_1(2j+1)$$

$$\begin{cases} L(j=1) = \sigma_R(j=1) - \sigma_P(j=1) = 61 \\ L(j=2) = \sigma_R(j=2) - \sigma_P(j=2) = 102 \\ L(j=3) = \sigma_R(j=3) - \sigma_P(j=3) = 142 \\ L(j=4) = \sigma_R(j=4) - \sigma_P(j=4) = 182 \end{cases}$$

$$B_1 = 10{,}08\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad r_e(v=1) = 1{,}30\ \text{Å}$$

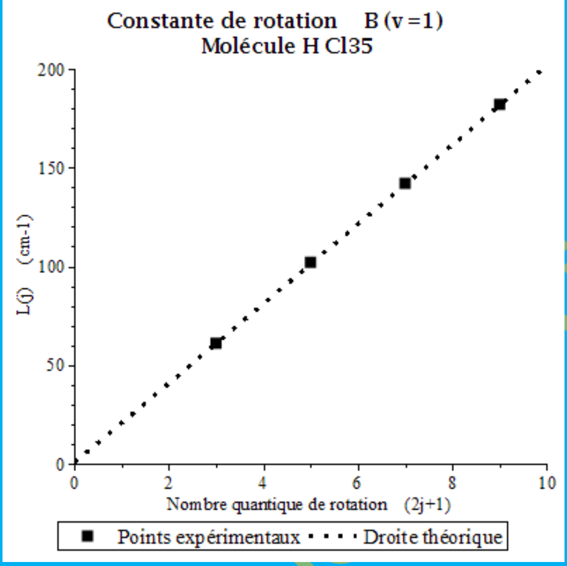
$$M(j) = \sigma_R(j-1) - \sigma_P(j+1)$$

$$\sigma_R(j-1) = \sigma_{v=0\to v=1} + 2B_1 + (3B_1 - B_0)(j-1) + (B_1 - B_0)(j-1)^2$$

$$\sigma_P(j+1) = \sigma_{v=0\to v=1} - (B_1 + B_0)(j+1) + (B_1 - B_0)(j+1)^2$$

Après calcul on trouve :

$$M(j) = 2B_0(2j+1)$$



$$\begin{cases} M(j=1) = \sigma_R(j=0) - \sigma_P(j=2) = 63 \\ M(j=2) = \sigma_R(j=1) - \sigma_P(j=3) = 105 \\ M(j=3) = \sigma_R(j=2) - \sigma_P(j=4) = 146 \end{cases}$$

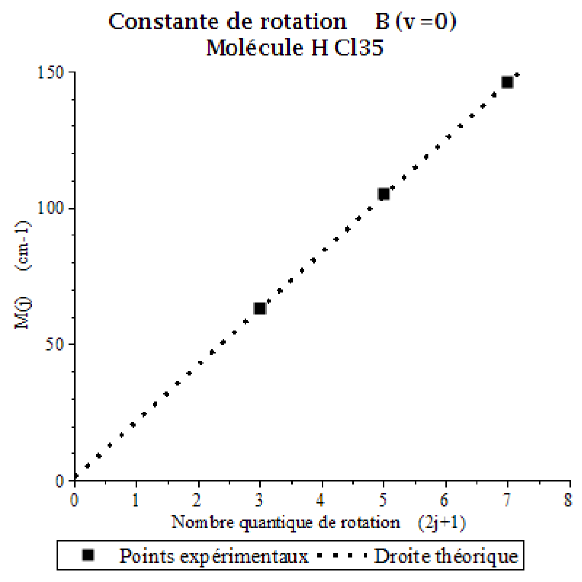
$$B_0 = 10{,}37\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad r_e(v=0) = 1{,}28\ \text{Å}$$

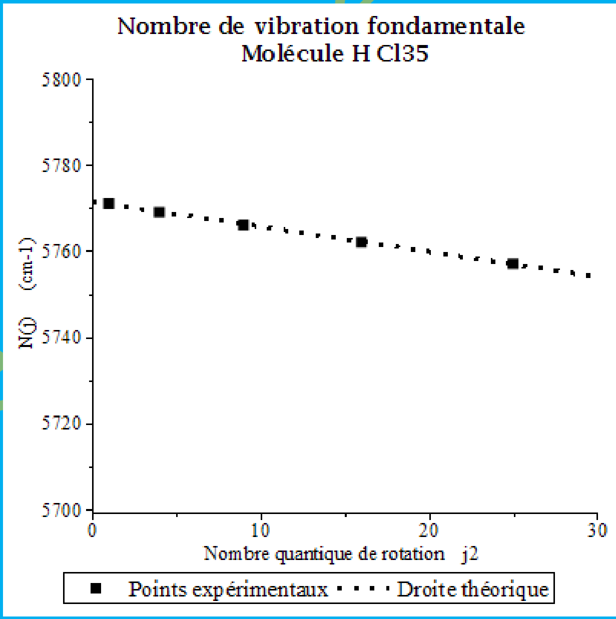
$$N(j) = \sigma_R(j-1) + \sigma_P(j)$$

$$\sigma_R(j-1) = \sigma_{v=0\to v=1} + 2B_1 + (3B_1 - B_0)(j-1) + (B_1 - B_0)(j-1)^2$$

$$\sigma_P(j) = \sigma_{v=0\to v=1} - (B_1 + B_0)j + (B_1 - B_0)j^2$$

$$N(j) = 2\sigma_{v=0\to v=1} + 2B_1 + (3B_1 - B_0)(j-1) - (B_1 + B_0)j \\ + (B_1 - B_0)[(j-1)^2 + j^2]$$





Après calcul on trouve :

$$N(j) = 2\omega_e + 2(B_1 - B_0)j^2$$

$$\begin{cases} N(j=1) = \sigma_R(j=0) + \sigma_P(j=1) = 5771 \\ N(j=2) = \sigma_R(j=1) + \sigma_P(j=2) = 5769 \\ N(j=3) = \sigma_R(j=2) + \sigma_P(j=3) = 5766 \\ N(j=4) = \sigma_R(j=3) + \sigma_P(j=4) = 5762 \\ N(j=5) = \sigma_R(j=4) + \sigma_P(j=5) = 5757 \end{cases}$$

$$\omega_e = 2885{,}8 \text{ cm}^{-1}$$

Exercice 19 : A. Le tableau ci-dessous montre, en cm^{-1}, les différences des nombres d'onde de raies consécutives.

Dans un spectre de vibration-rotation composé des branches P et R d'une molécule diatomique on peut faire deux observations. La différence des nombres d'onde de raies consécutives quelconques est en général égale à 2B. Si la différence entre les nombres d'onde de deux raies consécutives est le double soit 4B, on peut en déduire que le nombre d'onde de vibration fondamentale se situe au milieu.

7238	7267,2	7294,4	7319,7	7343,1	7364,1
	29,2	27,2	25,3	23,4	21
7401,8	7417,4	7431,4	7443,2	7453,2	7461,2
	15,6	14	11,8	10	8

On remarque que l'écart entre la raie n°6 et la raie n°7 soit 37,7 cm^{-1} est beaucoup plus grand que l'écart entre les autres raies. Cet écart varie entre 30 et 10 cm^{-1} car la molécule se comporte comme un rotateur non rigide.

Comme on s'intéresse à la transition entre les états v = 0 et v = 3, on peut dire que :

$$3\omega_e \cong 7382 \text{ cm}^{-1} \qquad \omega_e \cong 2460 \text{ cm}^{-1}$$

Pour obtenir une valeur de la constante de rotation B, on mesure l'intervalle entre la raie n°6 et la raie n°7 soit 37,7 cm^{-1}. Cet intervalle mesure 4B soit :

$$4B \cong 37{,}7\ \mathrm{cm^{-1}} \qquad B = 9{,}4\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$\omega_e = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad k = \mu(2\pi c\omega_e)^2 = 350\ \mathrm{N/m}$$

$$I = \frac{h}{8\pi^2 Bc} = 2{,}97.10^{-47}\ \mathrm{kg.m^2} \qquad r_e = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = 1{,}36\ \text{Å}$$

B. 1°) Les raies dont le nombre d'onde est inférieure à $3\omega_e$ = 7382 cm^{-1} appartiennent à la branche P soit :

Branche P					
7238	7267,2	7294,4	7319,7	7343,1	7364,1

Les raies dont le nombre d'onde est supérieure à $3\omega_e$ = 7382 cm^{-1} appartiennent à la branche R soit :

Branche R					
7401,8	7417,4	7431,4	7443,2	7453,2	7461,2

2°)

Branche P					
j=6→ j'=5	j=5→j'=4	j=4→ j'=3	j=3→ j'=2	j=2→ j'=1	j=1→ j'=0
7238	7267,2	7294,4	7319,7	7343,1	7364,1

Branche R					
j=5→ j'=6	j=4→j'=5	j=3→ j'=4	j=2→ j'=3	j=1→ j'=2	j=0→ j'=1
7401,8	7417,4	7431,4	7443,2	7453,2	7461,2

3°)

$$E_{v=3,j} = \frac{7}{2}\omega_e - \omega_e x_e \frac{49}{4} + B_3 j(j+1)$$

$$E_{v=0,j} = \frac{1}{2}\omega_e - \omega_e x_e \frac{1}{4} + B_0 j(j+1)$$

$$\sigma_P(j) = \sigma_{v=0\to v=3} + B_3 j(j-1) - B_0 j(j+1) \qquad j = 1,2.3..$$

$$\sigma_P(j) = 3\omega_e - 12\omega_e x_e + B_3 j(j-1) - B_0 j(j+1) \quad j = 1,2.3..$$

$$\sigma_R(j) = \sigma_{v=0\to v=3} + B_3(j+1)(j+2) - B_0 j(j+1) \qquad j = 0,1,2.$$

$$\sigma_R(j) = 3\omega_e - 12\omega_e x_e + B_3(j+1)(j+2) - B_0 j(j+1) \qquad j = 0,1,2.$$

$$L(j) = R(j) - P(j) \qquad M(j) = R(j-1) - P(j+1)$$

$$L(j) = B_3(j+1)(j+2) - B_0 j(j+1) - B_3 j(j-1) + B_0 j(j+1)$$

$$L(j) = B_3[(j+1)(j+2) - j(j-1)] - B_0[j(j+1) - j(j+1)]$$

$$L(j) = 2B_3(2j+1)$$

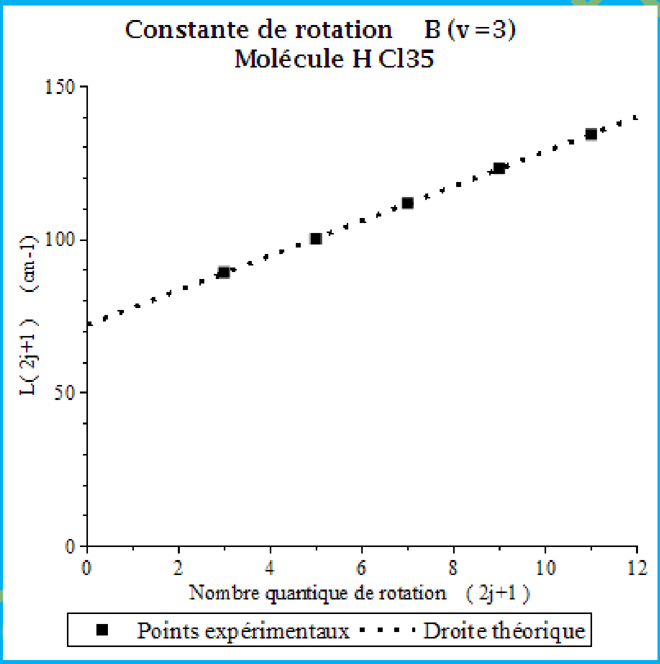
$$M(j) = B_3 j(j+1) - B_0 j(j-1) - B_3 j(j+1) + B_0(j+1)(j+2)$$

$$M(j) = B_0(j+1)(j+2) - B_0 j(j-1) = 2B_0(2j+1)$$

Branche P					
j=6→ j'=5	j=5→j'=4	j=4→ j'=3	j=3→ j'=2	j=2→ j'=1	j=1→ j'=0

7238	7267,2	7294,4	7319,7	7343,1	7364,1

Branche R					
$j=5 \rightarrow j'=6$	$j=4 \rightarrow j'=5$	$j=3 \rightarrow j'=4$	$j=2 \rightarrow j'=3$	$j=1 \rightarrow j'=2$	$j=0 \rightarrow j'=1$
7401,8	7417,4	7431,4	7443,2	7453,2	7461,2



$L(j=1) = 89{,}1$ $M(j=1) = 118{,}1$

$L(j=2) = 100{,}1$ $M(j=2) = 133{,}5$

$L(j=3) = 111{,}7$ $M(j=3) = 148{,}8$

$L(j=4) = 123$ $M(j=4) = 164{,}2$

$L(j=5) = 134{,}1$ $M(j=5) = 179{,}4$

L(j)					
	X = j	Y = L(j)	XY	X^2	Y^2
	1	89,1	267,3	1	7938,81
	2	100,1	500,5	4	10020,01
	3	111,7	781,9	9	12476,89
	4	123	1107	16	15129
	5	134,1	1475,1	25	17982,81
Somme	15	558	4131,8	55	63547,52
Moyenne	3	111,6	826,36	11	12709,50

$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{COV(X;Y)}{V(X)} \qquad COV(X;Y) = \overline{X\,Y} - \overline{X}\,\overline{Y} \qquad V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

$$a = 11{,}29 \qquad b = 77{,}725 \qquad L(j) = 11{,}29.j + 77{,}725$$

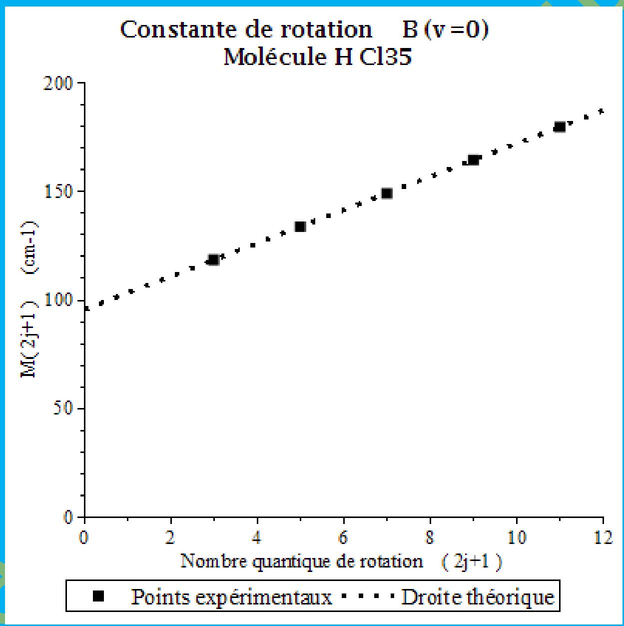
M(j)					
	X = j	Y = M(j)	XY	X^2	Y^2
	1	118,1	118,1	1	13947,61
	2	133,5	267	4	17822,25
	3	148,8	446,6	9	22141,44
	4	164,2	656,8	16	26961,64
	5	179,4	897	25	32184,36

Somme	15	744	2385,5	55	113057,3
Moyenne	3	148,8	477,1	11	22611,46

$a = 15{,}35 \qquad b = 102{,}75 \qquad M(j) = 15{,}35j + 102{,}75$

$L(j) = 4B_3 j + 2B_3 = 11{,}29.j + 77{,}725 \qquad B_3 = 2{,}82\ \text{cm}^{-1}$

$M(j) = 2B_0(2j+1) = 7{,}665(2j+1) + 95{,}14 \qquad B_0 = 3{,}83\ \text{cm}^{-1}$



C. $$\sigma_{0\to v} = \left(v+\frac{1}{2}\right)\omega_e - \omega_e x_e\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega_e + \omega_e x_e\frac{1}{4}$$

$$\sigma_{0\to v} = \omega_e v - \omega_e x_e(v^2+v)$$

$$\frac{\sigma_{0\to v}}{v} = \omega_e - \omega_e x_e - \omega_e x_e v$$

v	1	2	3	4	5
$\sigma_{0\to v}/v$	2568,4	2514,9	2461,4	2407,9	2354,4

$$\frac{\sigma_{0\to v}}{v} = 2621{,}9 - 53{,}5v \qquad \omega_e = 2675{,}4\ \mathrm{cm^{-1}} \qquad \omega_e x_e = 53{,}5\ \mathrm{cm^{-1}}$$

$$k = \mu(2\pi c\omega_e)^2 = 413\ \mathrm{N/m}$$